

Fabio Podesta'

Andrea Spiro

Introduzione ai
Gruppi di Trasformazioni

Introduzione

Negli anni 1990–94 Franco Tricerri ed alcuni elementi del gruppo locale di Firenze organizzarono diversi seminari sulle varietà omogenee e sui gruppi di automorfismi di alcune strutture geometriche. Tricerri stesso poi tenne un corso alla S.I.S.S.A. di Trieste sugli automorfismi delle G -strutture, pochi mesi prima della sua tragica scomparsa nel giugno 1994.

L'idea di stendere il presente libro è stata originata proprio per merito di quei seminari e dalle note che Franco scrisse per il corso di Trieste (e di cui ci siamo avvalsi per la stesura di parte del Capitolo II).

Gli obiettivi di questo libro possono dirsi due: uno consiste nel fornire una esposizione, per quanto possibile organica ed elementare, di alcuni fatti che abbiamo ritenuto fondamentali nella teoria dei gruppi di trasformazioni e che, peraltro, non avevamo ancora trovato raccolti in un unico testo; d'altra parte volevamo anche fornire una raccolta di risultati vari, più o meno classici, che possano rivelarsi utili o almeno chiarificatori per quanti vogliano dedicarsi alla ricerca in questo campo.

È inevitabile che la lettura di un libro sui gruppi di trasformazioni richieda come prerequisiti una certa dimestichezza con la teoria delle varietà differenziabili e dei gruppi di Lie. Comunque, sperando di rendere l'esposizione accessibile al maggior numero possibile di utenti, si è cercato di utilizzare in quasi tutte le dimostrazioni (ad ovvia eccezione di alcune, di carattere più strettamente tecnico) solo proprietà ben note e di patrimonio comune degli studenti dei primi anni dei corsi di Dottorato italiani.

Il primo capitolo è dedicato allo studio delle azioni lisce di un gruppo di Lie su varietà ed è centrato sul classico teorema di R. Palais. Il secondo capitolo invece riguarda lo studio degli automorfismi locali e globali di strutture geometriche assegnate ed è finalizzato alla dimostrazione dei teoremi di S. Kobayashi e di E. Cartan e S. Sternberg. Il terzo concerne una descrizione alquanto dettagliata delle azioni proprie, provando l'esistenza delle "slice" ed il teorema dell'orbita principale. Infine l'ultimo capitolo è stato dedicato alle varietà trasversali alle orbite, dette sezioni, che esistono per una ampia classe di varietà Riemanniane ed il cui studio riteniamo sia ricco di nuovi spunti per la ricerca.

Vogliamo sottolineare che questo excursus non ha alcuna pretesa di essere completo, ma solo di fornire una presentazione, auspicabilmente utile, di risultati basilari.

Il pensiero di entrambi, misto di gratitudine, affetto e nostalgia, va naturalmente al ricordo di Franco Tricerri.

Firenze, maggio 1996

Gli Autori

INDICE

Capitolo I – Azioni di Gruppi	7
§1. Prime definizioni	7
§2. Gruppi di Lie locali ed azioni locali di gruppi di Lie	9
§3. Trasformazioni infinitesime	12
§4. I teoremi di Lie e di Palais	18
§5. La topologia compatta aperta dei sottogruppi di $Diff(M)$	27
§6. Varietà omogenee	30
§6.1 Varietà omogenee come varietà di laterali	30
§6.2 Varietà omogenee e fibrati principali	36
§6.3 La rappresentazione lineare di isotropia e gli spazi omogenei riduttivi	38
§6.4 Varietà omogenee compatte	40
Capitolo II – G-strutture e loro automorfismi	47
§1. Il fibrato dei riferimenti lineari e le G -strutture su M	47
§2. Connessioni e prolungamenti di G -strutture	54
§3. Prolungamenti dei sottogruppi $G \subseteq GL(V)$ e le algebre corrispondenti	59
§4. $\{e\}$ -strutture e i loro automorfismi: il Teorema di Kobayashi	63
§5. $\{e\}$ -strutture e le orbite degli automorfismi locali: il Teorema di Cartan-Sternberg	69
§6. G -strutture infinitesimalmente omogenee	75
§7. Equazioni alle derivate parziali e le varietà dei Jet	78
§8. Equazioni differenziali soddisfatte dagli automorfismi di una G -struttura	85
Capitolo III – Azioni proprie e spazi di orbite	91
§1. Il teorema della fetta per le azioni proprie	91
§2. Struttura differenziale delle orbite e proprietà topologiche dello spazio delle orbite	97
§3. Azioni proprie ed azioni isometriche	100
§4. Intorni Tubolari e Tubi Lineari	104

§5. Tipi di orbite	107
§6. Orbite regolari, singolari ed eccezionali	110
Capitolo IV – Sottovarietà trasversali alle orbite	116
§1. Le sezioni di una G -varietà	116
§2. Criteri per l'esistenza di sezioni	126
§3. Azioni asistatiche	130
§4. Azioni polari	135
Bibliografia	139
Indice Analitico	141

CAPITOLO I

AZIONI DI GRUPPI

§1. Prime definizioni.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e sia G un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE 1.1. Diremo che il gruppo G *agisce* sulla varietà M , se è definita un'applicazione differenziabile liscia, detta *azione*,

$$\Theta : G \times M \rightarrow M$$

che soddisfi alle seguenti proprietà:

- a) $\Theta(g, \Theta(h, m)) = \Theta(gh, m)$ per ogni $g, h \in G$ ed ogni $m \in M$;
- b) $\Theta(e, m) = m$, per ogni $m \in M$, dove $e \in G$ denota l'elemento neutro di G .

Se Θ e Θ' sono due azioni di G su due varietà differenziabili M ed M' , rispettivamente, e se f è un'applicazione differenziabile da M in M' , diremo che f è *G -equivariante* se per ogni $m \in M$ e $g \in G$

$$f(\Theta(g, m)) = \Theta'(g, f(m)) \quad .$$

Le due azioni Θ e Θ' sulle due varietà M ed M' verranno dette *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo G -equivariante $f : M \rightarrow M'$.

Per semplicità di notazione, se viene assegnata un'azione Θ e se g è un elemento qualunque di G , indicheremo con $g(m)$ il punto $\Theta(g, m)$, qualunque sia $m \in M$. Una varietà su cui è definita un'azione di un gruppo G verrà anche detta un *G -spazio*.

Si noti che un'azione di un gruppo G su una varietà M induce un omomorfismo $\rho_\Theta : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ del gruppo G nel gruppo $\text{Diff}(M)$ di tutti i diffeomorfismi della varietà M .

Il nucleo di tale omomorfismo risulta essere un sottogruppo normale e chiuso di G . Diremo che l'azione è *effettiva* se tale nucleo è ridotto al solo elemento neutro. Se il nucleo $\ker \rho_\Theta$ è un sottogruppo discreto, chiameremo l'azione *quasi effettiva*. In ogni caso la seguente proposizione è di dimostrazione immediata:

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia Θ un'azione di G su M e sia N il nucleo dell'omomorfismo $\rho_\Theta : G \rightarrow \text{Diff}(M)$. Esiste allora un'azione indotta del gruppo quoziente G/N su M che risulta effettiva.*

In virtù di questa proposizione, in seguito ci occuperemo principalmente delle azioni effettive.

Se m è un punto qualunque di M , ha senso considerare il sottogruppo chiuso G_m di G dato da

$$G_m = \{g \in G \mid g(m) = m\} \quad .$$

Tale sottogruppo verrà detto sottogruppo di *isotropia* in m e se per ogni punto $m \in M$ si ha che $G_m = \{e\}$, l'azione verrà detta *libera*.

Se $m \in M$, l'*orbita* di G , *passante per* m , è l'insieme

$$G(m) = \{g(m) \mid g \in G\}.$$

Notiamo che due orbite $G(m)$ e $G(m')$ possono solo essere o disgiunte oppure coincidenti; in tal modo, l'azione di G su M induce una partizione di M in orbite. Lo spazio quoziente M/G , munito della topologia quoziente, verrà detto *spazio delle orbite*.

Sarà oggetto di paragrafi successivi lo studio della struttura topologica e differenziale di una singola orbita, da una parte, e dello spazio delle orbite, dall'altra.

§2. Gruppi di Lie locali ed azioni locali di gruppi di Lie.

DEFINIZIONE 2.1. Un gruppo di Lie locale consiste in una terna (U, e, U') , dove U è una varietà differenziabile, e è un punto base fissato di U e U' è un intorno aperto di e in U , che possiede un'operazione di *moltiplicazione*, ovvero un'applicazione differenziabile

$$\mu: U' \times U' \rightarrow U \quad , \quad (x, y) \rightarrow xy$$

soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$ex = xe = x$$

$$(xy)z = x(yz)$$

per qualunque x, y, z, xy, yz in U' . Queste condizioni implicano l'esistenza di un intorno dell'identità $W \subset U'$ e di una applicazione differenziabile (l'operazione di *inversione*)

$$\iota: W \rightarrow W \quad , \quad x \rightarrow x^{-1}$$

tale che $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ per qualunque $x \in W$.

Una coppia di aperti $\tilde{U} \subset U$ e $\tilde{U}' \subset U'$ costituiscono una *restrizione del gruppo locale* (U, e, U') se $(\tilde{U}, e, \tilde{U}')$ è esso stesso un gruppo di Lie locale.

Infine, due gruppi di Lie locali (U, e, U') e (V, f, V') sono detti *isomorfi* se ammettono due restrizioni $(\tilde{U}, e, \tilde{U}')$ e $(\tilde{V}, f, \tilde{V}')$ ed un diffeomorfismo $F: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tale che

$$F(e) = f \quad , \quad F(\tilde{U}') = \tilde{V}' \quad , \quad F(xy) = F(x)F(y) \quad \forall x, y \in \tilde{U}' .$$

In analogia con le azioni dei gruppi, diremo che un gruppo di Lie locale (U, e, U') *agisce* su M se è definita un'applicazione differenziabile

$$\Theta: U \times M \rightarrow M$$

che soddisfi alle proprietà a) e b) della Definizione 1.1, per ogni $g, h \in U'$.

Si osservi che se G è un gruppo di Lie e U è un intorno in G dell'identità e , è sempre possibile determinare un intorno U' tale che (U, e, U') sia un gruppo di Lie locale rispetto alla moltiplicazione in G . Anzi, si può dimostrare che *ogni* gruppo di Lie locale è ottenibile in questo modo da un'opportuno intorno U dell'elemento unità e di un gruppo di Lie G (vedi e.g. ([Var])).

Introduciamo ora le azioni locali di gruppi di Lie.

DEFINIZIONE 2.2. Diremo che il gruppo di Lie G *agisce localmente* su M se esistono due intorni aperti $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ di $\{e\} \times M \subset G \times M$ ed una applicazione

$$\Theta: \mathcal{V} \rightarrow M \quad ,$$

che verrà detta *azione locale*, tale che

$$\Theta(e, m) = m \quad \text{per ogni } m \in M$$

e

$$\Theta(g, \Theta(h, m)) = \Theta(gh, m) \quad \text{per ogni } (h, m), (g, m) \in \mathcal{V}' .$$

L'azione locale verrà detta *effettiva* se il fatto che $\Theta(g, m) = m$ per ogni punto m appartenente ad un aperto $U \subseteq M$ implica che $g = e$.

OSSERVAZIONE 2.3. Si osservi che l'esistenza di una azione locale di G su M equivale ad affermare che per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno aperto $U_p \subset M$, un gruppo di Lie locale (V_p, e, V'_p) (ottenuto come restrizione di G e *dependente dal punto* p), ed una azione

$$\Theta_p: V_p \times U_p \rightarrow M$$

tale che:

- a) $\Theta_p(g, \Theta(h, m)) = \Theta_p(gh, m)$ per ogni $g, h \in V'_p$ ed ogni $m \in U_p$;
- b) $\Theta_p(e, m) = m$, per ogni $m \in U_p$;
- c) per ogni coppia di aperti $V_p \times U_p$ e $V_q \times U_q$, la cui intersezione sia non vuota,

$$\Theta_p|_{(V_p \times U_p) \cap (V_q \times U_q)} \equiv \Theta_q|_{(V_p \times U_p) \cap (V_q \times U_q)} .$$

Infatti, se Θ è una azione locale definita su $\mathcal{V}$, una volta fissato un punto $p \in M$, si può determinare un intorno aperto di (e, p) in $\mathcal{V}$ della forma $V_p \times U_p$, $V_p \subset G$, $U_p \subset M$, e con questi due aperti costruire un'azione di un gruppo locale (V_p, e, V'_p) su U_p . Viceversa, data una famiglia di gruppi locali e di intorni su M

$$\mathcal{F} = \{(V_p, e, V'_p), U_p, \Theta_p\}_{p \in M} ,$$

che verifica le condizioni a), b) e c), si definisce univocamente l'azione locale ponendo $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p \in M} V_p \times U_p$ e $\Theta: \mathcal{V} \rightarrow M$ come

$$\Theta(g, p) = \Theta_p(g, p) .$$

Anche nel caso di azioni locali, si può considerare un analogo dell'applicazione ρ_Θ , che è stata definita per le azioni globali. Ovvero, se $\Theta: \mathcal{V} \rightarrow M$, con $\mathcal{V} \subset G \times M$, è un'azione locale, per ogni punto $p \in M$ ed ogni aperto $V_p \times U_p \subset \mathcal{V}$ abbiamo una applicazione (che indicheremo ancora con ρ_Θ)

$$\rho_\Theta: V_p \subset G \rightarrow \text{Diff}_{loc}(U_p, M)$$

fra V_p e l'insieme Diff_{loc} dei diffeomorfismi locali fra U_p e M . Sebbene non sia lecito affermare che ρ_Θ sia un omomorfismo fra gruppi (se non altro perchè $\text{Diff}_{loc}(U_p, M)$ non ammette neppure la struttura di gruppo locale), è evidente che vale la proprietà

$$\rho_\Theta(gg')(m) = \rho_\Theta(g) \circ \rho_\Theta(g')(m)$$

su tutti i punti $m \in U_p$, su cui entrambi i membri dell'eguaglianza risultino essere definiti.

Concludiamo il paragrafo, definendo il concetto di azioni locali equivalenti, o meglio, localmente equivalenti.

DEFINIZIONE 2.4. Due azioni locali

$$\Theta: \mathcal{V} \subset G \times M \rightarrow M$$

$$\Theta': \mathcal{W} \subset G \times M' \rightarrow M'$$

di G su due varietà M ed M' sono dette *localmente equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $f: M \rightarrow M'$, un isomorfismo $\Phi: G \rightarrow G$ e due intorni $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ e $\tilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$ di $\{e\} \times M$ e $\{e\} \times M'$ tali che:

a) l'applicazione

$$\varphi: G \times M \rightarrow G \times M'$$

$$\varphi(g, m) = (\Phi(g), f(m))$$

è tale che $\varphi(\tilde{\mathcal{V}}) = \tilde{\mathcal{W}}$;

b) $\Theta' \circ \varphi = \Theta$;

c) esistono due intorni $\tilde{\mathcal{V}}', \tilde{\mathcal{V}}'' \subset \tilde{\mathcal{V}}$ di $\{e\} \times M$ tale che la restrizione di Θ su $(\tilde{\mathcal{V}}', e, \tilde{\mathcal{V}}'')$ sia ancora un'azione locale di G su M .

§3. Trasformazioni infinitesime.

Dato un'aperto $U \subset M$, diremo *campo vettoriale locale* su U una qualunque sezione C^∞ di $TM|_U$

$$X: U \rightarrow TM \quad .$$

Per *campi vettoriali (globali)* intenderemo semplicemente campi che sono globalmente definiti su tutto M .

Si ricordi che per *flusso locale di X su di un aperto $V \subseteq U$* si intende l'unica applicazione liscia (se esiste)

$$\Phi^X:]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \rightarrow M \quad ,$$

che verifica il seguente problema differenziale:

$$\Phi_0^X(p) = p \tag{3.1}$$

$$\left. \frac{d\Phi_t^X}{dt} \right|_{(t,p)} = X(\Phi_t^X(p)) \tag{3.2}$$

per ogni $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $p \in V$. Si ricordi che per ogni $p \in U$ esiste un intorno V di p in U e un reale positivo ε tale che Φ_t^X sia definito su $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V$; tale risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a ([Spi]), dipende da classici risultati sull'esistenza di soluzioni per equazioni differenziali ordinarie e sulla loro dipendenza C^∞ dai dati iniziali.

Per praticità di riferimento, richiamiamo le seguenti fondamentali proprietà dei flussi locali:

- i) per ogni $|t| < \varepsilon$ fissato, Φ_t^X è un diffeomorfismo di V sull'aperto $\Phi_t^X(V)$;
- ii) se t, s e $t+s$ sono in $]-\varepsilon, \varepsilon[$, allora

$$\Phi_{t+s}^X = \Phi_t^X \circ \Phi_s^X \quad . \tag{3.3}$$

Infine, un campo vettoriale globale X è detto *completo* se il suo flusso Φ_t^X è definito su tutto $\mathbb{R} \times M$.

La seguente è una classica condizione per verificare la completezza di un campo vettoriale.

LEMMA 3.1. *Un campo X è completo se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che Φ_t^X sia definito su tutto $]-\varepsilon, \varepsilon[\times M$. In particolare, X è completo se è a supporto compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

OSSERVAZIONE 3.2. Si osservi che se due campi vettoriali X e Y sono completi, non necessariamente una loro combinazione lineare oppure la derivata di Lie $\mathcal{L}_X Y$ è completa.

Si consideri ad esempio la varietà $M = \mathbb{R}^2$ con le consuete coordinate x e y . Siano poi

$$X = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si tratta di due campi vettoriali completi con flussi

$$\Phi_t^X(x, y) = (x + yt, y), \quad \Phi_t^Y(x, y) = (x, y + \frac{x^2 t}{2}).$$

D'altra parte, il campo $V = \mathcal{L}_X Y = xy \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}$ non è completo; infatti, il flusso Φ_t^V ha come dominio massimale di definizione l'aperto $\{(t, (x, y)) : xt + 2 \neq 0\}$, dove è della forma

$$\Phi_t^V(x, y) = (\frac{x}{2 + xt}, \frac{y}{4}(2 + xt)^2).$$

Anche il campo $W = X + Y$ non è completo. Infatti, fissato un punto (x, y) , se indichiamo con $f(t)$ e $g(t)$ le due componenti di

$$\Phi_t^W(x, y) = (f(t), g(t)),$$

abbiamo che queste due funzioni devono essere soluzioni del problema di Cauchy

$$\frac{df}{dt} = g, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{f^2}{2}, \quad f(0) = x, \quad g(0) = y.$$

Si verifica facilmente che questo problema ammette soluzione globalmente definite se e solo se $x = y = 0$.

Vedremo comunque fra poco che *se un insieme di campi vettoriali completi genera un'algebra di Lie finito dimensionale, allora tutte le loro combinazioni lineari e le loro parentesi di Lie sono ancora campi vettoriali completi.*

In virtù della proposizione seguente, ogni campo vettoriale completo corrisponde ad un gruppo di Lie abeliano, unidimensionale.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia X un campo vettoriale completo su M . L'applicazione*

$$\begin{aligned} \Phi^X : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}(M) \\ t &\rightarrow \Phi_t^X \end{aligned} \tag{3.4}$$

è un'omomorfismo iniettivo fra il gruppo abeliano $(\mathbb{R}, +)$ e $\text{Diff}(M)$.

Viceversa, per ogni gruppo di Lie abeliano unidimensionale G che agisce globalmente su M , esiste un campo vettoriale completo X_G , il cui flusso Φ^{X_G} è un isomorfismo di Lie fra $\mathbb{R}$ e $\rho_\Theta(G) \subset \text{Diff}(M)$.

Se invece G è un gruppo abeliano unidimensionale che agisce solo localmente su M , si consideri una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti U_p e gruppi locali (V_p, e, V'_p) , $p \in M$, come

in Osservazione 2.3. Allora esiste sempre un campo vettoriale X_G (generalmente non completo), il cui flusso Φ^{X_G} coincide su ogni intorno U_p con l'azione Θ_p :

$$\Phi_t^{X_G}(m) = \Theta_p(t, m)$$

per ogni t appartenente al gruppo locale $V_p =]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[\subset G$.

DIMOSTRAZIONE. La prima parte dell'enunciato segue immediatamente dalle proprietà dei flussi. D'altra parte, se G è un gruppo abeliano unidimensionale, il gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ è il gruppo di Lie rivestimento universale di G . Indichiamo con

$$g: \mathbb{R} \rightarrow G$$

l'omomorfismo suriettivo fra $\mathbb{R}$ e G e con X_G il campo vettoriale definito da

$$X_G(p) = \left. \frac{dg_t(p)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Si osservi che il campo X_G è liscio poichè l'azione di G è liscia. Per di più, per le proprietà di gruppo di $(\mathbb{R}, +)$,

$$\left. \frac{dg_t(p)}{dt} \right|_{t=t_o} = \left. \frac{dg_t(g_{t_o}(p))}{dt} \right|_{t=0} = X_G(g_{t_o}(p))$$

per ogni valore di $t_o \in \mathbb{R}$. Segue che $g_t(p) = \Phi_t^{X_G}(p)$ per ogni $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$.

La dimostrazione dell'enunciato riguardante un'azione solo locale è perfettamente analoga. $\square$

La proposizione precedente permette di associare ad ogni azione Θ di un gruppo di Lie G l'insieme dei campi vettoriali completi, corrispondenti ai sottogruppi ad un parametro di G .

DEFINIZIONE 3.4. Se G è un gruppo di Lie che agisce su M , un campo vettoriale X su M verrà detto *trasformazione infinitesima per l'azione di G su M* se il flusso Φ_t^X è un sottogruppo ad un parametro del gruppo di diffeomorfismi $\rho_\Theta(G) \subseteq \text{Diff}(M)$.

Similmente, se G è un gruppo di Lie che agisce *solo localmente* su M , diremo che X è una *trasformazione infinitesima per l'azione locale di G su M* se, per ogni punto $p \in M$, il flusso Φ_t^X , definito su $]-\varepsilon, \varepsilon[\times U_p$ (per un certo $\varepsilon > 0$ dipendente da p), è tale che

$$\Phi_t^X \in \rho_\Theta(G) \subset \text{Diff}_{loc}(U_p, M)$$

per ogni $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

In ogni caso, indicheremo con $\mathfrak{G}_\Theta$ l'insieme delle trasformazioni infinitesime dell'azione Θ di G .

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia Θ una azione effettiva locale del gruppo di Lie G su M e sia $\mathfrak{G}$ l'algebra di Lie di G . Sia inoltre $\rho_{\Theta*}$ l'applicazione fra $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G}_{\Theta}$ tale che*

$$\rho_{\Theta}(\exp(tX))(m) = \Phi_t^{\rho_{\Theta*}(X)}(m)$$

per ogni $X \in \mathfrak{G}$ e per ogni t ed m su cui è definita. Allora, se G agisce globalmente su M , ρ_{Θ} gode delle seguenti proprietà:*

- a) $\rho_{\Theta*}(Ad(g)(X)) = \rho_{\Theta}(g)_*(\rho_{\Theta*}(X))$;
- b) $\rho_{\Theta*}(X) = 0$ se e solo se $X = 0$;
- c) $\rho_{\Theta*}(kX + hY) = k\rho_{\Theta*}(X) + h\rho_{\Theta*}(Y)$;
- d) $\rho_{\Theta*}([X, Y]) = -\mathcal{L}_{\rho_{\Theta*}(X)}\rho_{\Theta*}(Y)$;
- e) $\rho_{\Theta*}$ è suriettiva.

Se G agisce solo localmente, a) continua a valere se ristretta agli elementi g tali che $\{g\} \times M \subset \mathcal{V}$; b), c) d) ed e) valgono senza alcuna modifica.

Di conseguenza, in entrambe i casi, $\mathfrak{G}_{\Theta}$ è un'algebra di Lie finito-dimensionale e risulta isomorfa a $\mathfrak{G}$, se dotata di nuove parentesi di Lie:

$$[X, Y]' \stackrel{\text{def}}{=} -\mathcal{L}_X Y \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione di a), b), c), d) ed e) solo in caso di azioni globali. Le dimostrazioni, nel caso di azioni locali, sono identiche, a parte la necessità di specificare che le formule utilizzate risultano valide solo in opportuni insiemi aperti di M .

Utilizzando la definizione di $\rho_{\Theta*}$ si ha che

$$\begin{aligned} \Phi_t^{\rho_{\Theta*}(Ad(g)(X))} &= \rho_{\Theta}(\exp(t(Ad(g)(X)))) = \\ &= \rho_{\Theta}(g \circ \exp(tX) \circ g^{-1}) = \rho_{\Theta}(g) \circ \Phi_t^{\rho_{\Theta*}(X)} \circ \rho_{\Theta}(g^{-1}) \end{aligned}$$

cioè

$$\Phi_t^{\rho_{\Theta*}(X)} \circ \rho_{\Theta}(g^{-1}) = \rho_{\Theta}(g^{-1}) \circ \Phi_t^{\rho_{\Theta*}(Ad(g)(X))}$$

e differenziando in $t = 0$ si ottiene che

$$\rho_{\Theta*}(X)|_{\rho_{\Theta}(g^{-1})(p)} = \rho_{\Theta}(g^{-1})_*(\rho_{\Theta*}(Ad(g)(X)))(p) \quad .$$

b) segue dal fatto che se $\rho_{\Theta*}(X) = 0$, allora $\rho_{\Theta}(\exp(tX)) = id_M$ ed $\exp(tX) = e$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, per via dell'effettività dell'azione.

Per dimostrare c), si consideri

$$\begin{aligned} &\rho_{\Theta*}(hX + kY) - h\rho_{\Theta*}(X) - k\rho_{\Theta*}(Y)|_p = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(t(hX + kY)))(p) - h \frac{d}{d(-ht)} \Big|_{-ht=0} \rho_{\Theta}(\exp(-thX))(p) - \\ &\quad - k \frac{d}{d(-kt)} \Big|_{-kt=0} \rho_{\Theta}(\exp(-tkY))(p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(t(hX + kY)))(p) - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(thX))(p) - \\
&\quad - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(tkY))(p) = \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(t(hX + kY))) \circ \rho_{\Theta}(\exp(-thX)) \circ \rho_{\Theta}(\exp(-tkY))(p) = \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(t(hX + kY))\exp(-thX)\exp(-tkY))(p) \quad .
\end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione della mappa esponenziale, la curva γ nel gruppo G data da

$$\gamma(t) = \exp(t(hX + kY))\exp(-thX)\exp(-tkY)$$

è a derivata nulla in $t = 0$. Allora il campo vettoriale

$$Y|_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho_{\Theta}(\exp(t(hX + kY))\exp(-thX)\exp(-tkY))(p)$$

è identicamente nullo su M .

La dimostrazione di d) segue dalla seguente identità:

$$\begin{aligned}
[\rho_{\Theta*}(X), \rho_{\Theta*}(Y)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_{\Theta*}(Y) - \Phi_t^{\rho_{\Theta*}(X)} \rho_{\Theta*}(Y)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_{\Theta*}(Y) - \rho_{\Theta}(\exp(tX))_* \rho_{\Theta*}(Y)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \rho_{\Theta*} \left(\frac{Y - \text{Ad}(\exp(tX))(Y)}{t} \right) = -\rho_{\Theta*}([X, Y])
\end{aligned}$$

La suriettività di $\rho_{\Theta*}$ segue dal fatto che ogni trasformazione infinitesima Y^* di $\mathfrak{G}_{\Theta}$ genera un sottogruppo abeliano ad un parametro del gruppo di Lie $\mathcal{G} = \rho_{\Theta}(G)$ (si considera su $\mathcal{G}$ la struttura analitica indotta da G); questo gruppo ad un parametro deve coincidere con qualche $\exp(t\bar{Y})$, con $\bar{Y}$ elemento dell'algebra di Lie di $\mathcal{G}$. Per l'isomorfismo fra G e $\mathcal{G}$, ogni gruppo $\exp(t\bar{Y})$ può essere espresso come

$$\exp(t\bar{Y}) = \rho_{\Theta}(\exp(tY))$$

con Y elemento dell'algebra di Lie di G . Utilizzando queste definizioni, si ottiene direttamente che $\rho_{\Theta*}(Y) = Y^*$. $\square$

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia $H = G_m$ il sottogruppo di isotropia di un punto m , per un'azione globale di G su M , e sia $\mathfrak{H}$ l'algebra di Lie di H . Allora l'algebra $\rho_{\Theta*}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_{\Theta}$ coincide con*

$$\{X \in \mathfrak{G}_{\Theta} : X|_m = 0\}$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Per la Proposizione 3.5, ogni azione Θ (globale o locale che sia) di un gruppo di Lie G determina un'algebra di Lie campi vettoriali su M , ossia l'algebra $\mathfrak{G}_\Theta$ (se l'azione è globale, tali campi sono tutti completi).

Si intende ora studiare il problema inverso, ovvero il problema di ricostruire l'azione (locale o globale) di un gruppo di Lie G che ammetta come $\mathfrak{G}_\Theta$ un'algebra di Lie di campi vettoriali (locali oppure globali e completi) assegnata.

§4. I teoremi di Lie e di Palais.

Sia S un'algebra di Lie finito dimensionale di campi vettoriali su M e sia $\mathfrak{G}$ l'algebra di Lie ottenuta da S definendo come parentesi di Lie

$$[X, Y] = -\mathcal{L}_X Y,$$

dove $\mathcal{L}$ indica la derivata di Lie.

Diremo che S è un gruppo infinitesimale di trasformazioni su M , con algebra di Lie $\mathfrak{G}$. Per la Proposizione 3.5, risulta evidente che se G agisce (anche solo localmente) su M , l'insieme delle trasformazioni infinitesime $\mathfrak{G}_\Theta$ costituisce esattamente un gruppo infinitesimale di trasformazioni con algebra $\mathfrak{G}$.

Vogliamo ora mostrare che vale anche il viceversa, ovvero che ogni gruppo infinitesimale corrisponde ad un'azione locale di un gruppo di Lie.

LEMMA 4.1. *Sia S un gruppo infinitesimale di trasformazioni su M con algebra $\mathfrak{G}$ e sia $\tilde{G}$ il gruppo di Lie semplicemente connesso avente $\mathfrak{G}$ come algebra di Lie. Allora, per ogni punto $p \in M$ è possibile determinare un intorno aperto $U \subset M$ di p , un gruppo di Lie locale (V, e, V') , $V \subset \tilde{G}$, ed una azione $\tilde{\Theta}$ di V su U tale che*

$$\mathfrak{G}_{\tilde{\Theta}} = S|_U \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Si costruisca la distribuzione differenziabile $\mathcal{D}$ in $\tilde{G} \times M$, definita in ogni punto $(p, m) \in \tilde{G} \times M$ nel modo seguente

$$\mathcal{D}_{(g, m)} = \{(R_{g*}X, X_m) \in T_g \tilde{G} \times T_m M \cong T_{(g, m)}(\tilde{G} \times M), \quad X \in \mathfrak{G}\},$$

dove R_g denota la moltiplicazione in $\tilde{G}$ a destra per l'elemento $g \in \tilde{G}$.

Si noti che la distribuzione $\mathcal{D}$ è involutiva per costruzione e quindi è completamente integrabile. Fissato un punto $p \in M$, per il teorema di Frobenius, possiamo trovare un intorno aperto V di e in $\tilde{G}$, un intorno aperto U di p in M ed una funzione $C^\infty F : V \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $n = \dim M$, di modo che F sia una sommersione e per ogni $(g, m) \in V \times U$, la foglia integrale regolare di $\mathcal{D}$ passante per (g, m) sia data da

$$\mathcal{L}_{(g, m)} = \{(g', m') \in V \times U, \quad F(g', m') = F(g, m)\}.$$

Si ponga ora $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da $\phi(x) = F(e, x)$ e si noti che, per ogni $p \in U$, $d\phi_p$ è iniettivo poichè $\ker dF_{(e, p)} = \mathcal{D}_{(e, p)}$ e non è quindi mai tangente alla sottovarietà $\{e\} \times U$; ne segue che $d\phi_p$ è invertibile e che esiste un intorno aperto W di p tale che $\phi|_W$ sia un diffeomorfismo di W sull'aperto $\phi(W) \subset \mathbb{R}^n$. Restringendo eventualmente W ad un intorno aperto relativamente compatto in W , possiamo trovare un intorno aperto $V_1 \subset V$ di e in $\tilde{G}$ in modo che

$$V_1 \times W \subseteq F^{-1}(\phi(W)).$$

Ne segue che per ogni $(g, m) \in V_1 \times W$ esiste un unico punto $y \in W$ tale che

$$F(g, m) = F(e, y) \quad ,$$

ovvero il punto

$$y = \psi(g, m) = \phi^{-1}(F(g, m)) \quad . \quad (4.1)$$

È chiaro che l'applicazione $\psi : V_1 \times W \rightarrow W$ è di classe C^∞ e che, per ogni $m \in W$,

$$\psi(e, m) = \phi^{-1}(F(e, m)) = \phi^{-1}(\phi(m)) = m \quad .$$

La nostra intenzione è ora di definire come azione locale $\tilde{\Theta}$ proprio l'applicazione

$$\tilde{\Theta}(g, m) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(g^{-1}, m) \quad ,$$

in modo che ciascuna curva del tipo $(g_t, \tilde{\Theta}(g_t, m))$ (con g_t sottogruppo ad un parametro) appartenga sempre alla foglia integrale $\mathcal{L}_{(e, m)}$ passante per (e, m) .

Osserviamo che per ogni $h \in \tilde{G}$ l'applicazione $\tilde{R}_h : \tilde{G} \times M \rightarrow \tilde{G} \times M$ data da

$$\tilde{R}_h(g, m) = (gh, m)$$

trasforma la distribuzione $\mathcal{D}$ in sè: infatti, fissato $(g, m) \in \tilde{G} \times M$, si ha

$$\tilde{R}_{h*}|_{(g, m)}(R_{g*}X, X_m) = (R_{gh*}X, X_m) \in \mathcal{D}_{(gh, m)}.$$

Ne segue che $\tilde{R}_h$ trasforma foglie integrali per $\mathcal{D}$ in foglie integrali per $\mathcal{D}$. Quindi

$$F(g', m') = F(g, m) \Rightarrow F(g'h, m') = F(gh, m) \quad . \quad (4.2)$$

Restringendo eventualmente l'intorno V_1 , si può supporre che $V_1^{-1} = V_1$. Poichè $F(g^{-1}, m) = F(e, \psi(g^{-1}, m))$, si ha

$$F(e, m) = F(g, \psi(g^{-1}, m)) \quad \forall g \in V_1 \quad \forall m \in W, \quad (4.3)$$

ovvero l'applicazione $\Phi : V_1 \rightarrow V_1 \times W$ data da

$$\Phi(g) = (g, \psi(g^{-1}, m))$$

trasforma V_1 su un aperto della foglia integrale $\mathcal{L}_{(e, m)}$.

D'altra parte, scelti comunque $g, g' \in V_1$ di modo che $gg' \in V_1$, da (4.2) e (4.3) otteniamo

$$F(g', m) = F(gg', \psi(g^{-1}, m)).$$

Ma applicando ad entrambi i membri ϕ^{-1} , dalla (4.1) otteniamo

$$\psi(g', m) = \psi(gg', \psi(g^{-1}, m)) \quad ,$$

che equivale a

$$\psi(hg, m) = \psi(g, \psi(h, m))$$

per ogni $h, g \in V_1$ tali che $hg \in V_1$.

Ne segue pertanto che, se si definisce come già annunciato

$$\tilde{\Theta} : V_1 \times W \rightarrow W$$

$$\tilde{\Theta}(g, m) = \psi(g^{-1}, m) \quad ,$$

allora $\tilde{\Theta}$ risulta essere una azione locale; in particolare, è immediatamente soddisfatta la condizione

$$\tilde{\Theta}(g, \tilde{\Theta}(h, m)) = \psi(g^{-1}, \psi(h^{-1}, m)) = \psi(h^{-1}g^{-1}, m) = \tilde{\Theta}(gh, m) \quad .$$

È inoltre utile osservare che $\tilde{\Theta}(g, m)$ può anche definirsi come l'unico punto y tale che la coppia (g, y) appartiene alla foglia integrale $\mathcal{L}_{(e, m)}$, come mostrato dalla (4.3).

Infine, per definizione stessa della φ e della $\tilde{\Theta}$, segue immediatamente che, per ogni $X \in \mathfrak{G}$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Theta}(\exp(tX), m) = -\frac{d}{dt} \psi(\exp(tX), m) = -X_{\tilde{\Theta}(\exp(tX), m)}$$

e che perciò

$$\mathfrak{G}_{\tilde{\Theta}} = S|_U \quad \square$$

Il Lemma appena dimostrato costituisce il punto di partenza per gran parte dei successivi risultati di questa sezione. Storicamente, i primi teoremi che assicurano l'esistenza di azioni locali di gruppi di trasformazioni risalgono ai lavori di S. Lie e vennero inseguito generalizzati e semplicemente espressi in un formalismo più moderno da svariati altri matematici. È per questo motivo che il seguente teorema può a ragione essere considerato come essenzialmente dovuto a S. Lie (per un'ottima introduzione storica, si veda [Ama]).

TEOREMA 4.2. *Sia S un gruppo infinitesimale di trasformazioni su M con algebra $\mathfrak{G}$. Allora esiste un gruppo di Lie G , con algebra di Lie $\mathfrak{G}$, ed una azione locale effettiva Θ di G su M tale che $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\Theta}$.*

DIMOSTRAZIONE. In base al precedente Lemma 4.1 ed alla Osservazione 2.3, è sufficiente mostrare come sia possibile definire un ricoprimento di M con una famiglia di aperti $\{U_i\}$ e di corrispondenti azioni $\tilde{\Theta}_i$ di gruppi locali (V_i, e, V'_i) ($V_i \subset \tilde{G}$), che verificano le tesi del Lemma 4.1 e tali che

$$V_i \times U_i \cap V_j \times U_j \neq \emptyset \Rightarrow \Theta_i|_{V_i \times U_i \cap V_j \times U_j} \equiv \Theta_j|_{V_i \times U_i \cap V_j \times U_j} \quad .$$

A tale scopo, abbiamo allora bisogno del seguente Lemma (vedi [Var]):

LEMMA 4.3. Sia $\{U_i : i \in I\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di M . Per ogni coppia $(i, j) \in I \times I$, ed ogni $x \in U_i \cap U_j$, indichiamo con U_{ijx} un aperto contenuto in $U_i \cap U_j$. Allora per ogni $x \in M$ si può selezionare un intorno U_x tale che:

- (i) $x \in U_i \cap U_j$ implica che $U_x \subseteq U_{ijx}$;
- (ii) se $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ allora esiste un $i \in I$ tale che $U_x \cup U_y \subset U_i$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{V_i\}$ un'altro ricoprimento aperto localmente finito tale che per ogni $i \in I$ la chiusura $\bar{V}_i$ sia tale che

$$\bar{V}_i \subset U_i \quad .$$

Per ogni $x \in M$, si indichi con U'_x

$$U'_x = \bigcup_{i,j,l,m \in I : U_i \ni x, V_j \ni x, U_{lmx} \ni x} U_i \cap V_j \cap U_{lmx} \quad .$$

Dal momento che i ricoprimenti sono localmente finiti, ciascun U'_x è un aperto di M . Lo stesso si può affermare per ciascun insieme U_x

$$U_x \stackrel{\text{def}}{=} U'_x \cap \bigcap_{i \in I : x \notin \bar{V}_i} (M \setminus \bar{V}_i)$$

È evidente che, per ogni U_x , (i) è soddisfatta. D'altra parte, se $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, abbiamo sia che $U_x \subset V_i$, per qualche $i \in I$ e allo stesso tempo che $U_y \cap V_i \neq \emptyset$. Questo implica anche che $y \in V_i$ e che $U_y \subset U_i$. Da ciò segue la (ii). $\square$

FINE DIMOSTRAZIONE TEOREMA 4.2. Si consideri un ricoprimento aperto $\{U_i : i \in I\}$ localmente finito di M e per ciascun aperto U_i , si determini un gruppo locale (V_i, e, V'_i) ed una azione locale $\tilde{\Theta}_i$ come fornita dal Lemma 4.2. Si osservi che se $x \in U_i \cap U_j$ e U_{ijx} è definito come in Lemma 3.7, allora esiste un aperto

$$V_{ijx} \subset V_i \cap V_j$$

su cui

$$\tilde{\Theta}_i|_{V_{ijx} \times U_{ijx}} = \tilde{\Theta}_j|_{V_{ijx} \times U_{ijx}}$$

Per ogni $x \in M$, sia U_x l'intorno aperto della famiglia determinata dal Lemma 4.3 e sia $V_x \subset \tilde{G}$ l'aperto dato dall'intersezione di tutti i gruppi locali V_{ijx} corrispondenti a tutte le coppie di U_i e U_j che contengono x .

A questo punto si può definire come azione locale Θ_x di V_x una qualunque delle azioni $\tilde{\Theta}_i$, con $U_i \ni x$ e, per le proprietà (i) e (ii) di Lemma 4.3 e per l'Osservazione 2.3, segue immediatamente che le famiglie $\{U_x\}$, $\{V_x\}$ e $\{\Theta_x\}$ definiscono una azione locale di $\tilde{G}$ su M . $\square$

Il seguente teorema, dovuto a Palais, fornisce la versione globale del Teorema 4.2. Per la dimostrazione, abbiamo seguito da vicino la versione originale di Palais ([Pal3]), con parecchie semplificazioni.

TEOREMA 4.4. *Sia S un gruppo infinitesimale di trasformazioni su M con algebra finito-dimensionale $\mathfrak{G}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- i) ogni campo vettoriale $X \in S$ è completo;*
- ii) S è generata (come algebra) da un sottoinsieme di campi vettoriali completi;*
- iii) S è generata (come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$) da un sottoinsieme di campi completi;*
- iv) esiste un'azione Θ di un gruppo G su M , con algebra di Lie $\mathfrak{G}$, tale che*

$$S = \mathfrak{G}_\Theta \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Le implicazioni $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iv) \Rightarrow (i)$ seguono direttamente dalle definizioni.

Proviamo allora che $(ii) \Rightarrow (iii)$. Indichiamo con A l'insieme dei campi di S che sono completi e scegliamo un sottoinsieme finito massimale di elementi linearmente indipendenti $\{X_1, \dots, X_n\}$. È chiaro che $A \subset L(X_1, \dots, X_n)$, dove $L(X_1, \dots, X_n)$ è lo spazio vettoriale generato da $\{X_1, \dots, X_n\}$. Proveremo che $L(X_1, \dots, X_n)$ è un'algebra di Lie; poichè A genera S come algebra, seguirà che $L(X_1, \dots, X_n) = S$. Dunque non resta da dimostrare che $\mathcal{L}_{X_i} X_j \in L(X_1, \dots, X_n)$ per ogni coppia di indici $i, j = 1, \dots, n$.

Ora, se $\Phi_t^{X_i}$ indica il flusso generato dal campo X_i , abbiamo che

$$\mathcal{L}_{X_i} X_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [X_j - (\Phi_t^{X_i})_* X_j].$$

Notiamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, il campo $(\Phi_t^{X_i})_* X_j$ genera il flusso $\Phi_t^{X_i} \circ \Phi_s^{X_j} \circ \Phi_{-t}^{X_i}$ e quindi è completo, poichè X_i e X_j lo sono.

Proviamo ora che il campo $(\Phi_t^{X_i})_* X_j$ appartiene a S , per piccoli valori di t . Per fare ciò, usiamo il risultato del Teorema 4.2, che ci assicura l'esistenza di una azione locale $\tilde{\Theta}$ di un gruppo $\tilde{G}$ su M che induce S . Si noti allora che per t sufficientemente piccolo (in modo tale che $\Phi_t^{X_i}$ sia immagine tramite $\tilde{\Theta}$ di qualche elemento di $\tilde{G}$) si ha che

$$(\Phi_t^{X_i})_* X_j = \rho_{\tilde{\Theta}*} (Ad(\exp(tX_i)X_j)) \quad ,$$

dove abbiamo usato la notazione e i risultati della Proposizione 3.5. Da qui segue che il campo $(\Phi_t^{X_i})_* X_j$ appartiene ad S e quindi, essendo completo, a $L(X_1, \dots, X_n)$. Poichè $L(X_1, \dots, X_n)$ è uno spazio vettoriale finito dimensionale, si ha che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [X_j - (\Phi_t^{X_i})_* X_j] \in L(X_1, \dots, X_n),$$

da cui la tesi.

Proviamo ora l'implicazione $(iii) \Rightarrow (iv)$; adotteremo la notazione della dimostrazione del Lemma 4.1.

Si consideri il gruppo semplicemente connesso $\tilde{G}$ avente come algebra $\mathfrak{G}$ e si costruisca la distribuzione $\mathcal{D}$ in $\tilde{G} \times M$, come fatto nel Lemma 4.1. L'idea principale della dimostrazione consiste nel mostrare che per ogni $m \in M$, la restrizione della proiezione

$$\pi_1: \tilde{G} \times M \rightarrow \tilde{G}$$

alla foglia massimale integrale $\mathcal{L}_{(e,m)}$, la rende un rivestimento di $\tilde{G}$.

Consideriamo allora, per ogni $m \in M$, la sottovarietà massimale integrale $\mathcal{L}_{(e,m)}$ per $\mathcal{D}$, passante per (e, m) . Per ipotesi, esistono k campi completi $X_1, \dots, X_k$ di S che la generano come spazio vettoriale e, fissato un punto $m \in M$, costruiamo allora l'applicazione

$$\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{G} \times M$$

data da

$$\Psi(t_1, \dots, t_k) = (\exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_k X_k), \Phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(m))$$

e proviamo che Ψ ha valori nella foglia integrale $\mathcal{L}_{(e,m)}$. Mostriamo questo per induzione su k : se $k = 1$, l'applicazione Ψ può scriversi come

$$\Psi(t) = (\exp(tX), \Phi_t^X(m))$$

e, poichè per ogni $t \in \mathbb{R}$ il differenziale di Ψ ha valori nella distribuzione $\mathcal{D}$, l'applicazione Ψ ha valori in $\mathcal{L}_{(e,m)}$.

Consideriamo allora l'applicazione

$$\bar{\Psi}(t_1, \dots, t_{k-1}) = (\exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_{k-1} X_{k-1}), \Phi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(m)),$$

che, per ipotesi induttiva, ha valori in $\mathcal{L}_{(e,m)}$. Poichè

$$\begin{aligned} \Psi(t_1, \dots, t_k) &= \\ &= (R_{\exp(t_k X_k)}(\exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_{k-1} X_{k-1})), \Phi_{t_k}^{X_k} \circ (\Phi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \dots \circ \Phi_{t_1}^{X_1}(m))), \end{aligned}$$

ne segue che per ogni $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\Psi(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{L}_{(\exp(t_k X_k), \Phi_{t_k}^{X_k}(m))}.$$

Ma

$$\mathcal{L}_{(\exp(t_k X_k), \Phi_{t_k}^{X_k}(m))} = \mathcal{L}_{(e,m)}$$

per quanto visto nel caso $k = 1$ e quindi abbiamo la tesi.

Poichè l'applicazione $\exp : \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{G}$ data da

$$\exp(t_1, \dots, t_k) = \exp(t_1 X) \cdot \dots \cdot \exp(t_k X_k)$$

ha rango massimo in $0 \in \mathbb{R}^k$, possiamo trovare un intorno connesso $\mathcal{V}$ di $0 \in \mathbb{R}^k$ che viene trasformato da $\exp$ diffeomorficamente su un intorno V di e in $\tilde{G}$. Poniamo, per ogni $m \in M$, $V_m = \Psi(\mathcal{V})$ e si noti che V_m è un aperto di $\mathcal{L}_{(e,m)}$ e che $\Psi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow V_m$ è un diffeomorfismo. Proviamo allora il seguente

LEMMA 4.5. *Se π_1 indica la proiezione canonica $\pi_1 : \tilde{G} \times M \rightarrow \tilde{G}$, allora V_m coincide con la componente connessa di (e, m) in $\mathcal{L}_{(e, m)} \cap \pi_1^{-1}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che V_m è chiuso in $\mathcal{L}_{(e, m)} \cap \pi_1^{-1}(V)$. Sia allora (g, p) un punto di $\mathcal{L}_{(e, m)} \cap \pi_1^{-1}(V)$ che non stia in V_m e si consideri l'unico punto $(g, q) \in V_m$ tale che $\pi_1((g, p)) = \pi_1((g, q))$. Essendo $\ker d\pi_1$ trasverso a $\mathcal{D}$, $\pi_1|_{\mathcal{L}_{(e, m)}}$ è un diffeomorfismo locale e possiamo quindi trovare intorno aperti disgiunti $W \subset V_m$ di (g, q) e $U \subset \mathcal{L}_{(e, m)}$ di (g, p) che vengono trasformati diffeomorficamente su un intorno di g in $\tilde{G}$.

Poichè $\pi_1|_{V_m}$ è un diffeomorfismo, abbiamo che $U \cap V_m \subset W$; ma, al tempo stesso, U e W sono disgiunti e questo implica che $U \cap V_m = \emptyset$, cioè la tesi. $\square$

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 4.6. *La proiezione $\pi_1|_{\mathcal{L}_{(e, m)}}$ è surgettiva su $\tilde{G}$ per ogni $m \in M$.*

DIMOSTRAZIONE. Vogliamo provare per induzione che per ogni naturale $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $m \in M$

$$V^n \subseteq \pi_1(\mathcal{L}_{(e, m)}),$$

dove V è l'aperto $\exp(\mathcal{V})$. Poichè gli aperti $\{V^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generano $\tilde{G}$, questo proverà la tesi.

Il caso $n = 1$ è chiaro. Supponiamo di aver provato che V^{n-1} è contenuto in $\pi_1(\mathcal{L}_{(e, m)})$. Scegliamo allora $g \in V^n$ ed esprimiamolo come $g = hg'$, con $g' \in V$ e $h \in V^{n-1}$; fissato $m \in M$, sappiamo che esiste un punto $(g', z) \in \mathcal{L}_{(e, m)}$ e che, per ipotesi induttiva, esiste un punto $(h, w) \in \mathcal{L}_{(e, z)}$.

Notiamo ora che la trasformazione $\tilde{R}_{g'}$ (definita nella dimostrazione del Lemma 4.1) trasforma $\mathcal{L}_{(e, z)}$ in $\mathcal{L}_{(g', z)}$ e quindi

$$(hg', w) \in \mathcal{L}_{(g', z)} = \mathcal{L}_{(e, m)},$$

da cui la tesi. $\square$

Vogliamo ora provare che per ogni punto $m \in M$ la proiezione π_1 fornisce una applicazione di rivestimento di $\mathcal{L}_{(e, m)}$ su $\tilde{G}$. Mostreremo che per ogni $g \in \tilde{G}$, la proiezione π_1 trasforma ogni componente connessa di $\pi_1^{-1}(gV) \cap \mathcal{L}_{(e, m)}$ diffeomorficamente su gV . Fissiamo una componente C di $\pi_1^{-1}(gV) \cap \mathcal{L}_{(e, m)}$ e sia $(g, x) \in C$. Ora $\tilde{R}_{g^{-1}}$ trasforma C nella componente connessa di (e, x) in $\pi_1^{-1}(V) \cap \mathcal{L}_{(e, x)}$ e la proiezione

$$\varphi = \pi_1|_{\tilde{R}_{g^{-1}}(C)} : \tilde{R}_{g^{-1}}(C) \rightarrow V$$

è un diffeomorfismo. Ne segue allora che

$$\pi_1|_C = \tilde{R}_g \circ \varphi \circ \tilde{R}_{g^{-1}}$$

e quindi è un diffeomorfismo.

Si conclude così che $\pi_1|_{\mathcal{L}_{(e,m)}}$ è un rivestimento e che, essendo $\tilde{G}$ semplicemente connesso, $\pi_1|_{\mathcal{L}_{(e,m)}}$ è un diffeomorfismo.

Possiamo allora definire l'azione globale di $\tilde{G}$ su M come segue: per ogni $(g, m) \in \tilde{G} \times M$ definiamo $\tilde{\Theta}(g, m) \in M$ come l'unico punto di M tale che

$$(g, \tilde{\Theta}(g, m)) \in \mathcal{L}_{(e,m)}.$$

L'applicazione $\tilde{\Theta} : \tilde{G} \times M \rightarrow M$ risulta liscia in quanto, se ristretta ad un intorno $V \times U \subseteq \tilde{G} \times M$ coincide con l'azione $\tilde{\Theta}$ definita nella dimostrazione del Lemma 4.1. Allo stesso modo si mostra che $\tilde{\Theta}$ soddisfa alle proprietà delle azioni, date dalle (a) e (b) nella Definizione 1.1. Poichè poi l'applicazione

$$g \mapsto (g, \tilde{\Theta}(g, m))$$

ha valori in $\mathcal{L}_{(e,m)}$ per ogni $m \in M$, si deduce facilmente, usando la definizione stessa di $\mathcal{L}_{(e,m)}$, che $\tilde{\Theta}$ induce S come gruppo infinitesimale.

Poichè nessun campo di S è identicamente nullo su M , ne segue che il nucleo N dell'azione è discreto e quindi $\tilde{\Theta}$ induce un'azione effettiva Θ di $G = \tilde{G}/N$ su M , avente ancora S come gruppo infinitesimale corrispondente. $\square$

Il seguente teorema fornisce una versione più debole del teorema di Palais, ma trova ugualmente varie applicazioni. Per la dimostrazione seguiremo il lavoro di Chu e Kobayashi ([ChKo]).

TEOREMA 4.7. *Sia G un sottogruppo di $\text{Diff}(M)$ e sia S l'insieme di campi vettoriali su M completi che generano sottogruppi ad un parametro di G . Se S genera un'algebra di Lie $\tilde{S}$ di dimensione finita, allora $S = \tilde{S}$ e G ammette una struttura di gruppo di Lie tale che l'applicazione*

$$\Theta : G \times M \rightarrow M$$

$$\Theta(g, m) = g(m)$$

rappresenta un'azione di G su M . L'algebra delle trasformazioni infinitesime $\mathfrak{G}$ di G coincide con S .

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\tilde{S}$ è generata da campi completi, il teorema di Palais assicura l'esistenza di un gruppo di Lie connesso $\tilde{G}$ con azione Θ su M e che induce $\tilde{S}$ come gruppo infinitesimale. Per l'equivalenza di ii) e iii) nel Teorema 4.6, segue che combinazioni lineari di campi completi sono ancora complete e quindi anche che $S = \tilde{S}$.

È chiaro che il gruppo $\tilde{G}$ è un sottogruppo di G . Si osservi anche che, se si sceglie $\varphi \in G$ e un sottogruppo ad un parametro $\{\psi_t\} \subset \tilde{G}$, allora $\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}$ è un sottogruppo ad un parametro di G . Poichè tale sottogruppo ad un parametro induce un campo su M che, per definizione, appartiene ad S , ne segue che $\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}$ è un sottogruppo ad un parametro di $\tilde{G}$. Ma $\tilde{G}$ è generato dai suoi sottogruppi ad un parametro e quindi $\tilde{G}$ è un sottogruppo normale di G ; inoltre, per ogni $\varphi \in G$,

l'automorfismo $A_\varphi : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ dato da $A_\varphi(\psi) = \varphi\psi\varphi^{-1}$ trasforma sottogruppi ad un parametro in sottogruppi ad un parametro. Osservando ora che l'applicazione $A_\varphi \circ \exp$ è continua in 0, otteniamo che ciascun A_φ è un automorfismo continuo.

Dobbiamo ora definire su G una struttura di gruppo di Lie: innanzitutto osserviamo che se $\{V_i\}_{i \in I}$ denota un sistema di intorni di e in $\tilde{G}$, possiamo definire una topologia su G prendendo $\{gV_i\}_{i \in I}$ come sistema di intorni di $g \in G$; il fatto che ciascun A_g sia continuo, garantisce l'esistenza di tale topologia, in cui $\tilde{G}$ risulta un sottogruppo (normale) aperto in G . In tale modo $\tilde{G}$ è la componente connessa di e in G e in maniera ovvia si può ora definire la struttura di gruppo di Lie su G .

È immediato verificare che la differenziabilità dell'azione di $\tilde{G}$ su M implica la differenziabilità dell'azione $\Theta(g, m) = g(m)$. $\square$

Concludiamo questo paragrafo con un criterio di equivalenza fra le azioni, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio.

TEOREMA 4.8. *Siano Θ e Θ' due azioni effettive locali di G su M . Allora Θ e Θ' sono localmente equivalenti se e solo se esiste un diffeomorfismo $f \in \text{Diff}(M)$ che induce un isomorfismo di Lie fra le algebre $\mathfrak{G}_\Theta$ e $\mathfrak{G}_{\Theta'}$.*

OSSERVAZIONE 4.10. Si possono altresì ottenere altri teoremi di equivalenza globale fra azioni di gruppi di Lie, richiedendo però ulteriori ipotesi che non si limitano all'esistenza di isomorfismi fra le corrispondenti algebre di trasformazioni infinitesime ma che riguardano anche la topologia di M e dei gruppi di Lie in questione. Rimandiamo a [Pal3] per ulteriori informazioni.

§5. La topologia compatta aperta dei sottogruppi di $\text{Diff}(M)$.

Nei paragrafi precedenti abbiamo provato dei teoremi che assicurano che certi gruppi G di diffeomorfismi di una varietà M sono in realtà dotati di una struttura di gruppi di Lie con azione liscia su M . È perciò naturale chiedersi come caratterizzare quella topologia su G , che lo rende un gruppo di Lie. Iniziamo con la seguente

DEFINIZIONE 5.1. Siano X e Y due spazi topologici, G un insieme di applicazioni continue da X in Y e sia, per ogni compatto $K \subseteq X$ ed ogni aperto $U \subseteq Y$,

$$(K, U)_G \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in G : f(K) \subseteq U\} .$$

Se $K_1, \dots, K_n$ sono compatti di X e $U_1, \dots, U_m$ sono aperti di Y , poniamo

$$(K_1, \dots, K_m, U_1, \dots, U_m)_G = \bigcup_{i=1}^m (K_i, U_i)_G .$$

Si definisce *topologia compatta aperta* su G la topologia $\mathcal{T}_{ca}$ avente come base di aperti tutti i sottoinsiemi del tipo $(K_1, \dots, K_m, U_1, \dots, U_m)_G$, al variare dei compatti $K_1, \dots, K_n \subset X$ e degli aperti $U_1, \dots, U_m \subset Y$ ($m \in \mathbb{N}$).

Si dice invece *topologia compatta aperta modificata* la topologia $\mathcal{T}'_{ca}$ su G avente come base tutte le componenti connesse per archi degli aperti di $\mathcal{T}_{ca}$. Chiaramente $\mathcal{T}_{ca} \subset \mathcal{T}'_{ca}$.

È facile verificare che la topologia compatta aperta $\mathcal{T}_{ca}$ può anche essere definita come la topologia meno fine tra le topologie su G che rendono continua l'applicazione

$$\Theta: G \times X \rightarrow X$$

$$\Theta(g, p) = g(p) .$$

Similmente, la topologia compatta aperta modificata è la topologia meno fine tra quelle che sono più fini di $\mathcal{T}_{ca}$ e rendono G localmente connesso per archi.

Infine, è noto che se Y è uno spazio metrico, la topologia compatta aperta delle applicazioni continue da X a Y coincide con la topologia della uniforme convergenza sui compatti. In altre parole, si ha che se Y è uno spazio metrico, una successione f_n di applicazioni in $\mathcal{C}(X, Y)$ risulterà essere una successione convergente nella topologia compatta aperta se e soltanto se è uniformemente convergente su qualunque compatto $K \subseteq X$.

TEOREMA 5.2. *Sia $G \subset \text{Diff}(M)$ un gruppo di diffeomorfismi su cui sia definita una struttura differenziabile tale da renderlo un gruppo di Lie con una infinità numerabile di componenti connesse e tale che l'applicazione*

$$\Theta: G \times M \rightarrow M$$

$$\Theta(g, p) = g(p)$$

sia continua. Allora la topologia $\mathcal{T}$ di G , corrispondente alla struttura di varietà differenziabile, coincide con la topologia $\mathcal{T}'_{ca}$ compatta aperta modificata.

Inoltre, qualunque omomorfismo

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$$

tale che l'applicazione $\Theta_\varphi(t, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(\varphi(t), p)$ sia continua su $\mathbb{R} \times M$ implica che $\varphi(\mathbb{R})$ è un sottogruppo ad un parametro di G .

DIMOSTRAZIONE. Dal momento che Θ è continua, la topologia $\mathcal{T}$ è necessariamente più forte o uguale alla topologia compatta aperta $\mathcal{T}_{ca}$. Poichè M è localmente compatto e localmente connesso, segue anche che G è un gruppo topologico nella topologia $\mathcal{T}_{ca}$ e che è un gruppo topologico localmente connesso per archi nella topologia $\mathcal{T}'_{ca}$. Avremo allora che le topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'_{ca}$ coincidono in base al seguente Lemma 5.3. L'affermazione sui sottogruppi ad un parametro segue direttamente dal fatto che ogni sottogruppo ad un parametro continuo per la topologia $\mathcal{T}'_{ca}$ è automaticamente continuo anche per la topologia $\mathcal{T}_{ca}$ e quindi per la topologia di gruppo di Lie di G .

LEMMA 5.3. *Sia φ un isomorfismo continuo fra un gruppo di Lie G soddisfacente al secondo assioma di numerabilità (cioè con un'infinità numerabile di componenti connesse) ed un gruppo topologico H localmente connesso per archi. Allora φ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Siano e_G ed e_H le unità di G ed H , rispettivamente e sia V un intorno compatto di e_G . È sufficiente dimostrare che $\varphi(V)$ è un intorno di e_H . Si consideri un intorno aperto U di e_G tale che

$$U = U^{-1} \quad \overline{U}^2 \subset V$$

Si osservi che, essendo $V \setminus U$ compatto, $\varphi(V \setminus U)$ è anch'esso compatto ed il suo complementare $H \setminus \varphi(V \setminus U)$ è quindi un intorno aperto in H di e_H . Si consideri allora un intorno aperto X di e_H , che sia connesso per archi e tale che

$$XX^{-1} \cap \varphi(V \setminus U) = \emptyset$$

Vogliamo mostrare che in tal caso $X \subset \varphi(V)$ e che quindi φ è un intorno dell'identità.

Consideriamo la relazione su $\varphi^{-1}(X)$ definita come

$$y \cong y' \quad \Leftrightarrow \quad yy'^{-1} \in \overline{U}$$

e proviamo che è una relazione di equivalenza. Infatti, le proprietà di simmetria e riflessività seguono dal fatto che U è un intorno simmetrico dell'identità; se poi $y, y', y'' \in \varphi^{-1}(X)$ sono tali che

$$y \cong y' \quad \text{e} \quad y' \cong y'' \quad ,$$

allora, $yy'^{-1}y'y''^{-1} \in \overline{U}^2 \subset V$; ma $\varphi(yy''^{-1}) \in XX^{-1}$ e quindi $yy''^{-1} \notin V \setminus U$; ne segue che $yy''^{-1} \in \overline{U}$, cioè $y \cong y''$.

A questo punto, possiamo introdurre la famiglia dei 'lateralì' destri $\overline{U}g$ in G , ovvero gli insiemi del tipo

$$\overline{U}g = \{ x \in G : x = ug, u \in \overline{U} \}$$

e vogliamo far vedere che se g e g' sono due elementi di $\varphi^{-1}(X)$ e $\overline{U}g \cap \overline{U}g' \neq \emptyset$, allora $g' \cong g$. Infatti, se $h \in \overline{U}g \cap \overline{U}g'$,

$$gh^{-1} \in \overline{U}^{-1} = \overline{U} \quad hg'^{-1} \in \overline{U} \quad \Rightarrow \quad gg'^{-1} \in \overline{U}^2 \subset V$$

D'altra parte

$$\varphi(gg'^{-1}) \in XX^{-1}$$

e dal momento che XX^{-1} è disgiunto da $\varphi(V \setminus U)$, possiamo concludere che

$$gg'^{-1} \in \overline{U}$$

ovvero che $g \cong g'$.

In base a quest'ultima proprietà, possiamo considerare una famiglia completa $\{g_\alpha\}$ di elementi rappresentativi delle classi di equivalenza in $\varphi^{-1}(X)$ ed abbiamo che gli insiemi $\overline{U}g_\alpha$ sono tutti disgiunti e ricoprono $\varphi^{-1}(X)$. Dal momento che ciascun $\overline{U}g_\alpha$ ha interno non vuoto e che G soddisfa il secondo assioma di numerabilità, la collezione $\{\overline{U}g_\alpha\}$ è numerabile.

Poichè l'applicazione φ è iniettiva, $\{X \cap \varphi(\overline{U}g_\alpha)\}$ è un ricoprimento numerabile di insiemi disgiunti e chiusi di X (chiusi perchè ciascun $\varphi(\overline{U}g_\alpha)$ è un insieme compatto). D'altra parte, qualunque curva γ con estremi in e_H ed un qualunque altro punto $x \in X$ ha immagine connessa, localmente connessa e compatta. Per un risultato di topologia* si ottiene che è interamente contenuta in uno degli insiemi disgiunti $\varphi(\overline{U}g_\alpha)$, ovviamente quello che contiene e_H e cioè $\varphi(\overline{U})$. Questo dimostra che $X \subseteq \varphi(\overline{U}) \subset \varphi(V)$ e che quindi $\varphi(V)$ è un intorno di e_H . $\square$

*Si usa qui il seguente fatto di topologia generale: sia Y uno spazio connesso, compatto, localmente connesso, con $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, dove $\{E_n\}$ è una famiglia numerabile di chiusi a due a due disgiunti, con $E_1 \neq \emptyset$; allora $Y = E_1$ (vedi [Pal3])

§6. Varietà omogenee.

DEFINIZIONE 6.1. Se l'azione effettiva del gruppo di Lie G su M possiede un'unica orbita distinta, diremo che G agisce *transitivamente* su M , l'azione è detta *transitiva* ed M verrà detto *spazio omogeneo* (rispetto all'azione di G).

Le varietà omogenee costituiscono forse la classe più interessante e più ricca di applicazioni di varietà dotata di una azione di gruppo. La letteratura sull'argomento è vastissima ed una sua discussione esauriente esula dagli scopi di questo libro. Comunque, in linea con l'idea principale di riportare in modo più o meno organico una serie di tecniche che possono tornar utili nell'affrontare problemi riguardanti i gruppi di trasformazioni, la presente sezione conterrà oltre ad una descrizione delle proprietà di base degli spazi omogenei, anche alcuni interessanti (e forse poco noti) risultati riguardanti le molteplici proprietà topologiche delle varietà omogenee.

§6.1 Varietà omogenee come varietà di laterali.

Un esempio tipico viene fornita dalla seguente situazione.

Sia G un gruppo di Lie e H un sottogruppo chiuso di G . Allora lo spazio dei laterali G/H , munito della topologia quoziente, è uno spazio di Hausdorff poichè H è chiuso e la proiezione $\pi : G \rightarrow G/H$ è continua e *aperta* (infatti se $A \subset G$ è aperto, allora $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{h \in H} hA$ è aperto in G).

Il gruppo G agisce transitivamente su G/H tramite l'azione $\mu : G \times G/H \rightarrow G/H$ data da

$$\mu(g, g'H) = (gg')H \quad g, g' \in G$$

e tale azione è continua. Il seguente teorema, di basilare importanza, mostra come lo spazio G/H sia dotato di una struttura di varietà, non solo liscia, bensì analitica, ed è tale che G agisca su G/H analiticamente.

TEOREMA 6.2. *Sia G un gruppo di Lie e H un sottogruppo chiuso di G . Allora esiste una ed una sola struttura di varietà analitica su G/H di modo che la proiezione canonica $\pi : G \rightarrow G/H$ e l'azione μ siano entrambe analitiche. Inoltre $\dim G/H = \dim G - \dim H$.*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{H}$ le algebre di Lie di G e H rispettivamente. Scegliamo quindi un sottospazio $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ di modo che $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$ e sia $\psi : \mathfrak{M} \rightarrow G$ la restrizione della mappa esponenziale a $\mathfrak{M}$, ovvero

$$\psi(X) = \exp(X), \quad X \in \mathfrak{M}.$$

Proviamo allora il seguente

LEMMA 6.3. *Esiste un intorno U di $0 \in \mathfrak{M}$ tale che $\pi \circ \psi|_U$ sia un omeomorfismo sull'immagine e $\pi \circ \psi(U)$ è un intorno aperto di $\pi(e)$.*

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. Notiamo che esistono intorni dell'origine $U_{\mathfrak{M}}$ e $U_{\mathfrak{H}}$ in $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{H}$ rispettivamente, tali che l'applicazione

$$\exp : U_{\mathfrak{M}} \times U_{\mathfrak{H}} \rightarrow G$$

$$\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}(X, Y) = \exp(X) \exp(Y)$$

sia un diffeomorfismo sull'immagine. Questo segue dal fatto che l'applicazione $\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}$ ha rango massimo nell'origine. Inoltre, poichè H è chiuso, la topologia di H come gruppo di Lie e quella indotta da G coincidono (vedi e.g. [Hel]) e quindi $\exp(U_{\mathfrak{M}})$ è della forma $V \cap H$ per qualche intorno V di $e \in G$.

Prendiamo ora un intorno compatto U di 0 in $U_{\mathfrak{M}}$ tale che

$$\exp(-U) \exp(U) \subset V.$$

Proviamo ora che $\pi|_{\psi(U)}$ è iniettiva: infatti se $\pi(\psi(X)) = \pi(\psi(Y))$, abbiamo che $\psi(-Y)\psi(X) \in H$, cioè

$$\psi(-Y)\psi(X) \in H \cap V \subset \exp(U_{\mathfrak{H}}).$$

Ne segue che $\psi(X) = \exp(Y)\exp(Z)$ per qualche $Z \in U_{\mathfrak{H}}$. Ma $\exp|_{U_{\mathfrak{M}} \times U_{\mathfrak{H}}}$ è iniettiva e quindi $X = Y$ e $Z = 0$. In conclusione, che $\pi \circ \psi|_U$ è un omeomorfismo sull'immagine.

Infine, si osservi che $\exp(U)\exp(U_{\mathfrak{H}})$ è un intorno di e in G e quindi, poichè π è aperta, $\pi(\exp(U)\exp(U_{\mathfrak{H}}))$ ($= \pi(\exp(U))$) è un intorno di $\pi(e)$. $\square$

Siamo ora in grado di definire la struttura di varietà analitica su G/H . Per fare ciò, consideriamo $N_o = \widehat{\pi \circ \psi(U)}$, (dove U è l'aperto introdotto nel Lemma 6.3). Sia poi $X_1, \dots, X_r$ una base fissata di $\mathfrak{M}$. Osserviamo allora che l'applicazione

$$\varphi_g: \pi \circ L_g \circ \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\pi(g(\exp(x_1 X_1 + \dots + x_r X_r))) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$$

è un omeomorfismo di gN_o su un aperto di $\mathbb{R}^r$, poichè il gruppo G agisce come gruppo di omeomorfismi di G/H . Non è difficile (ma noioso!) verificare che le carte $\{\varphi_g\}_{g \in G}$ forniscono una struttura di varietà analitica su G/H (ovvero che se $gN_o \cap g'N_o \neq \emptyset$, l'applicazione $\varphi_g \circ \varphi_{g'}^{-1}$ è analitico reale). Segue così anche che la dimensione è $r = \dim G - \dim H$. $\square$

Sia ora M una varietà su cui un gruppo di Lie G agisca transitivamente. Se fissiamo un punto $m \in M$, possiamo considerare l'applicazione $\Theta_m: G \rightarrow M$ data da

$$\Theta_m(g) = g(m).$$

È chiaro che l'applicazione Θ_m è continua e surgettiva, poichè G agisce transitivamente; inoltre, se H denota il sottogruppo di isotropia del punto m (H è chiuso!), l'applicazione Θ_m induce un'applicazione continua e surgettiva $\tilde{\Theta}_m: G/H \rightarrow M$ data da

$$\tilde{\Theta}_m(gH) = g(m).$$

L'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ risulta anche essere iniettiva, in quanto se $g(m) = g'(m)$, allora $g'^{-1}g \in H$, ovvero $gH = g'H$. Di fatto, possiamo dimostrare qualcosa di più, e cioè che l'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ è un'equivalenza, come G -spazi, di G/H ed M . A questo scopo, dimostriamo dapprima la seguente

PROPOSIZIONE 6.4. *L'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ è un omeomorfismo*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che l'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ è aperta e questo si può ridurre a mostrare che Θ_m è aperta.

Sia $V \subset G$ un aperto, $g \in V$ un elemento qualunque e determiniamo un intorno compatto U di e in G con $U = U^{-1}$ e $gU^2 \subset V$.

Ora il gruppo G si può esprimere come $G = \bigcup_{g \in G} gU$ e, poichè G è a base numerabile, per il teorema di Lindelöff, esisterà una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $G = \bigcup_n g_n U$. Poichè l'azione di G su M è transitiva, abbiamo che

$$M = \bigcup_n g_n U(m).$$

Ciascun $g_n U$ è compatto in G , di modo che ciascun insieme di orbite $g_n U(m)$ è compatto (e quindi chiuso) in M . Per il teorema di Baire, deve esistere almeno un indice $p \in \mathbb{N}$ tale che la parte interna di $g_p U(m)$ sia non vuota. Ma l'elemento g_p agisce come un omeomorfismo di M in sè e quindi $\widehat{U(m)}^\circ \neq \emptyset$.

A questo punto, consideriamo un elemento $u \in U$ con $u(m) \in \widehat{U(m)}^\circ$, tale che

$$m \in u^{-1} \widehat{U(m)}^\circ \subset \widehat{U^2(m)}^\circ.$$

Infine,

$$g(m) \in g \widehat{U^2(m)}^\circ \subset \widehat{V(m)}^\circ.$$

Poichè il ragionamento non dipende dall'elemento $g \in V$ prescelto, ne segue che $V(m)$ è aperto. $\square$

Siamo ora in grado di mostrare che G/H ed M sono equivalenti.

TEOREMA 6.5. *L'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ è un diffeomorfismo G -equivariante di G/H (con la struttura di varietà analitica data dal Teorema 6.3) su M . In altre parole, l'azione di G su M è equivalente all'azione su G/H .*

Inoltre la componente connessa G° dell'identità in G agisce transitivamente su M .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione verrà divisa in tre parti: nella prima mostriamo che l'applicazione $\tilde{\Theta}_m$ è differenziabile, nella seconda che $\tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}$ è un isomorfismo e nella terza che $\tilde{\Theta}_m$ ha differenziale ovunque invertibile e quindi, essendo biiettiva, è un diffeomorfismo.

La differenziabilità di $\tilde{\Theta}_m$ è provata facilmente nel modo seguente: con le notazioni usate nella dimostrazione del Teorema 6.2, osserviamo che $\pi|_{\psi(U)}$ è invertibile e che $\pi^{-1}|_{N_o}$ è differenziabile. Allora, poichè

$$\tilde{\Theta}_m|_{N_o} = \Theta_m \circ \pi^{-1}|_{N_o},$$

ne segue che $\tilde{\Theta}_m|_{N_o}$ è differenziabile. Osservando ora che

$$\tilde{\Theta}_m(g'gH) = g'\tilde{\Theta}_m(gH), \quad g, g' \in G \quad (6.1)$$

e che G agisce transitivamente e in modo differenziabile sia su G/H che su M , otteniamo che $\tilde{\Theta}_m$ è differenziabile ovunque.

Proviamo ora l'iniettività di $\tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}$: poichè π è una submersione, ogni vettore tangente $Y \in T_{[eH]}(G/H)$ sarà esprimibile come $Y = \pi_*|_e(X)$, per qualche $X \in \mathfrak{G}$. Notiamo allora che

$$\tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}(Y) = \tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}(\pi_*|_e(X)) = \Theta_{m*}|_e(X).$$

Supponiamo ora che Y stia nel nucleo di $\tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}$; ne segue che

$$\Theta_{m*}|_e(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Theta_m(\exp(tX)) = 0 \quad .$$

Ma allora, per la Proposizione 3.6,

$$\Theta_{m*}|_e(X) \in \text{Lie}(G_{\Theta_m(e)}) = \mathfrak{H}$$

e quindi $Y = d\pi_e(X) = 0$, il che prova l'iniettività.

Abbiamo già provato che $\tilde{\Theta}_m$ è un omeomorfismo e quindi, per l'invarianza topologica della dimensione, abbiamo che $\dim G/H = \dim M$, da cui otteniamo che $\tilde{\Theta}_{m*}|_{[eH]}$ è invertibile.

Ora, dalla relazione (6.1), segue subito che $\tilde{\Theta}_{m*}$ è invertibile ovunque e che $\tilde{\Theta}_m$ è un diffeomorfismo.

Veniamo ora all'ultima asserzione: è chiaro che $G = \bigcup_{g \in G} G^o g$ e che $G^o g$ è un sottoinsieme aperto di G , qualunque sia $g \in G$. Allora M è unione delle orbite $\{G^o g(m)\}_{g \in G}$, ciascuna delle quali è aperta perchè l'applicazione Θ_m è aperta. Poichè due orbite $G^o g(m)$, $G^o g'(m)$ sono disgiunte od uguali ed M è connesso, ne segue che M coincide con una singola orbita $G^o g(m) = G^o(gm)$, ovvero che G^o agisce transitivamente. $\square$

Il precedente teorema ci permette di identificare ogni spazio omogeneo con uno spazio di laterali del tipo G/H . Si ha perciò:

COROLLARIO 6.6. *Ogni spazio omogeneo ammette una struttura di varietà analitica.*

ESEMPIO 6.7. Consideriamo la sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Il gruppo delle isometrie lineari $O(n+1, \mathbb{R})$ agisce transitivamente su S^n e il sottogruppo di isotropia del punto $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$ può essere identificato con $O(n, \mathbb{R})$. Per il Teorema 6.5, S^n può essere identificata come lo spazio omogeneo

$$S^n = O(n+1, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$$

e notevoli proprietà di S^n possono essere dimostrate in virtù di questa identificazione. Si deve tuttavia osservare che esistono altri gruppi che agiscono effettivamente e transitivamente su S^n ed è quindi possibile ottenere altre rappresentazioni della sfera come spazio di laterali.

Nel seguente schema, riportiamo la classificazione di *tutti i gruppi connessi compatti* G che agiscono transitivamente sulla sfera (per la dimostrazione della classificazione, si veda e.g. [MoSa]). Nella tabella indichiamo il sottogruppo di isotropia H , a meno di coniugio, e la dimensione della sfera corrispondente. Si noti infine che l'azione di G su $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è sempre quella indotta dall'azione lineare di G su $\mathbb{R}^{n+1}$:

G	H	n
$SO(k)$	$SO(k-1)$	$k-1$
$U(k)$	$U(k-1)$	$2k-1$
$SU(k)$	$SU(k-1)$	$2k-1$
$\frac{Sp(1) \times Sp(k)}{\mathbb{Z}_2}$	$\frac{Sp(1) \times Sp(k-1)}{\mathbb{Z}_2}$	$4k-1$
$\frac{T^1 \times Sp(k)}{\mathbb{Z}_2}$	$\frac{T^1 \times Sp(k-1)}{\mathbb{Z}_2}$	$4k-1$
$Sp(k)$	$Sp(k-1)$	$4k-1$
$Spin(9)$	$Spin(7)$	15
$Spin(7)$	G_2	7
G_2	$SU(3)$	6

Altre rappresentazioni della sfera possono essere ottenute come spazi di laterali di gruppi non compatti; ad esempio possiamo considerare l'azione Θ del gruppo $SL(n+1, \mathbb{R})$ su S^n definito come segue

$$\Theta(A, p) = \frac{Ap}{\|Ap\|} \quad A \in SL(n+1, \mathbb{R}), p \in S^n.$$

Tale azione è ancora effettiva e transitiva e fornisce la rappresentazione $S^n = SL(n+1, \mathbb{R})/H$, dove H è un opportuno sottogruppo di isotropia (in questo caso necessariamente non compatto!).

ESEMPIO 6.8. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$ è uno spazio omogeneo rispetto all'azione transitiva di $G = SO(n+1, \mathbb{R})$. Infatti l'azione transitiva di G sulla sfera S^n passa al quoziente $\mathbb{RP}^n = S^n/\{\pm Id\}$. In tal caso però l'azione non è sempre effettiva: è facile verificare infatti che il nucleo N di tale azione è dato da $N = \{Id\}$ se n è pari, mentre $N = \{\pm Id\}$ se n è dispari.

ESEMPIO 6.9. L'importanza del Corollario 6.6 risiede anche nel fatto che costituisce un importante strumento per definire una struttura di varietà analitica su spazi topologici, sui quali sarebbe altrimenti molto difficile costruire persino una struttura di varietà differenziale.

Un caso interessante è costituito dallo spazio delle grassmaniane $G_{k,n}$, ovvero l'insieme dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k

$$G_{k,n} = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid \dim V = k\} \quad .$$

Si verifica subito che il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ agisce transitivamente sull'insieme dei k -sottospazi di $\mathbb{R}^n$ e che il sottogruppo di isotropia H di un qualunque elemento $V \in G_{k,n}$ è chiuso in $GL(n, \mathbb{R})$. Ne segue che $G_{k,n}$ può essere identificato con $GL(n, \mathbb{R})/H$ e che ammette una ed una sola struttura di varietà analitica in modo che l'azione di $GL(n, \mathbb{R})$ sia analitica. Come applicazione si ottiene anche che la dimensione di $G(n, k)$ è uguale a $n^2 - \dim H = k(n - k)$.

La stessa procedura può essere utilizzata per dimostrare l'esistenza di una struttura di varietà analitica anche per la cosiddetta *flag manifold* (o *varietà bandiera*), cioè l'insieme di tutte le successioni di n sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n$$

che soddisfano alle condizioni $\dim V_j = j$ per ogni $1 \leq j \leq n$.

§6.2 Varietà omogenee e fibrati principali.

Sappiamo allora che ogni spazio omogeneo M si può rappresentare come quoziente G/H per un opportuno sottogruppo chiuso H di G . Si osservi che il gruppo G costituisce anche lo spazio totale di un *fibrato principale* con base M , gruppo di struttura H e proiezione π (vedi Cap.II). Infatti basta notare che il gruppo H agisce differenziabilmente sul gruppo G in modo libero tramite traslazioni *destre* e che lo spazio base M è diffeomorfo al quoziente G/H ; resta soltanto da verificare che la proiezione è localmente triviale, ovvero che per ogni $m \in M$ esiste un intorno $U(m)$ in M e un'applicazione $\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow H$ tale che

$$\begin{aligned}\phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times H \\ g &\mapsto (\pi(g), \tau(g))\end{aligned}$$

sia un diffeomorfismo. In base alla notazione del Teorema 6.2, la verifica di questa affermazione conclusiva, può essere condotta considerando l'aperto $U = N_o$ e l'applicazione $\tau = \exp \circ (\pi \circ \psi)|_{N_o}^{-1}$.

Si noti che la fibrazione $\pi : G \rightarrow G/H$ non è quasi mai globalmente banale. Tuttavia, una condizione sufficiente è fornita dal seguente risultato dovuto a Mal'cev.

PROPOSIZIONE 6.10. *Sia G un gruppo di Lie semplicemente connesso e H un sottogruppo di Lie normale in G . Allora H è chiuso e la fibrazione $\pi : G \rightarrow G/H$ è globalmente triviale. In particolare H e G/H sono entrambi semplicemente connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Seguiremo il metodo di dimostrazione di Hochschild ([Hoc]). Indichiamo con $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{H}$ le algebre di Lie di G e H rispettivamente. Sia ora A l'insieme di tutti gli ideali propri $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{G}$ che contengono $\mathfrak{H}$ e sia $\mathfrak{G}_1$ un elemento massimale di A . Per ricorrenza si possono trovare sottoalgebre $\mathfrak{G}_i$ ($i = 0, \dots, r$) con $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{r-1} \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{G}_0$ e tali che ciascun $\mathfrak{G}_i$ è un elemento massimale tra gli ideali propri di $\mathfrak{G}_{i-1}$ contenenti $\mathfrak{H}$. Una qualunque successione di tali sottoalgebre verifica sempre le proprietà indicate nei seguenti due lemmi.

LEMMA 6.11. *Per ogni intero $1 \leq i \leq r$, esiste una sottoalgebra $\mathfrak{b}_i$ tale che*

$$\mathfrak{G}_{r-i} = \mathfrak{b}_i \oplus \mathfrak{G}_{r-i+1} \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Basta provare che, dato un ideale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{G}$ che sia massimale nell'insieme degli ideali propri, allora esiste una sottoalgebra $\mathfrak{b}$ tale che $\mathfrak{G} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Per mostrare ciò, osserviamo che, essendo $\mathfrak{a}$ massimale, l'algebra quoziente $\mathfrak{G}/\mathfrak{a}$ è o semplice oppure ha dimensione uguale a 1. Se $\dim \mathfrak{G}/\mathfrak{a} = 1$, basta prendere un elemento $X \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{a}$ e porre $\mathfrak{b} = L(X)$. Se $\mathfrak{G}/\mathfrak{a}$ è semplice, il suo radicale è nullo e quindi $\text{rad}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{a}$. Per il Teorema di Levi e Mal'cev, possiamo trovare una sottoalgebra semisemplice $\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{G} = \text{rad}(\mathfrak{G}) \oplus \mathfrak{m}$ e, poichè $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{m}$, esiste una sottoalgebra semplice $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{m}$ tale che

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}) \quad .$$

È chiaro a questo punto che $\mathfrak{G} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$. $\square$

LEMMA 6.12. *Siano $B_1, \dots, B_r$ i sottogruppi di Lie connessi corrispondenti alle sottoalgebre $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r$. I gruppi H e $B_1, \dots, B_r$ sono chiusi e semplicemente connessi. Inoltre l'applicazione*

$$(b_r, \dots, b_1, h) \mapsto b_r \cdot \dots \cdot b_1 \cdot h$$

di $B_r \times \dots \times B_1 \times H$ in G è un diffeomorfismo analitico.

DIMOSTRAZIONE. Proviamolo per induzione su r . Per $r = 1$ abbiamo $\mathfrak{G} = \mathfrak{b}_1 \oplus \mathfrak{H}$. L'algebra di Lie $\mathfrak{G}$ è isomorfa al prodotto semidiretto $\mathfrak{b}_1 \times_\sigma \mathfrak{H}$, dove $\sigma(Y) = \text{ad}(Y)|_{\mathfrak{H}}$ per ogni $Y \in \mathfrak{b}_1$. Possiamo allora introdurre l'omomorfismo $\phi : B_1 \rightarrow \text{Aut}(H)$ dato da

$$\phi(b)(a) = bab^{-1} \quad a \in H, b \in B_1$$

e considerare il gruppo di Lie $\tilde{G} = B_1 \times_\phi H$ avente algebra $\mathfrak{b}_1 \times_\sigma \mathfrak{H}$. Adesso, l'applicazione $\lambda : B_1 \times_\phi H \rightarrow G$ data da

$$\lambda(b, h) = b \cdot h$$

è un omomorfismo di Lie il cui differenziale λ_* è un isomorfismo di $\mathfrak{b}_1 \times_\sigma \mathfrak{H}$ su $\mathfrak{G}$. Poichè G è semplicemente connesso, λ è un isomorfismo. Si conclude che $H = \lambda(\{1\} \times H)$ e $B_1 = \lambda(B_1 \times \{1\})$ sono chiusi in G ed essendo G diffeomorfo al prodotto $B_1 \times H$, segue che H e B_1 sono entrambi semplicemente connessi.

Assumiamo ora $r \geq 2$. Sia G_1 il sottogruppo connesso corrispondente all'ideale $\mathfrak{G}_1$. Per quanto dimostrato sopra, entrambi G_1 e B_r sono chiusi in G e semplicemente connessi. Applicando l'ipotesi induttiva al gruppo G_1 , otteniamo che H e $B_1, \dots, B_{r-1}$ sono chiusi in G_1 (e quindi in G) e sono semplicemente connessi. Inoltre l'applicazione

$$(b_{r-1}, \dots, b_1, h) \rightarrow b_{r-1} \cdot \dots \cdot b_1 \cdot h$$

è un diffeomorfismo di $B_{r-1} \times \dots \times B_1 \times H$ su G_1 , da cui la tesi. $\square$

FINE DIMOSTRAZIONE. Per concludere la dimostrazione della Proposizione 6.10, basta osservare che l'applicazione $b_r \cdot \dots \cdot b_1 H \rightarrow b_r \cdot \dots \cdot b_1$ fornisce una sezione globale della fibrazione π . $\square$

ESERCIZIO 6.13. Si consideri il gruppo $SO(4, \mathbb{R})$ che opera transitivamente sulla sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Provare che la fibrazione $\pi : SO(4, \mathbb{R}) \rightarrow S^3$ è globalmente triviale. (Sugg.: si usi il fatto che la sfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ può essere identificata con il gruppo $SU(2)$, che opera liberamente su se stesso per traslazioni).

Determinare un diffeomorfismo esplicito $\varphi : H \times S^3 \rightarrow SO(4, \mathbb{R})$, dove H è il sottogruppo di isotropia in $(1, 0, 0, 0) \in S^3$.

§6.3 *La rappresentazione lineare di isotropia e gli spazi omogenei riduttivi.*

Se $M = G/H$ è un G -spazio omogeneo e p è la classe laterale $eH \in M$, il gruppo di isotropia H di G in p ammette una rappresentazione naturale come gruppo di trasformazioni lineari di $T_p M$

$$\rho : H \rightarrow GL(T_p M)$$

detta *rappresentazione lineare di isotropia*. È definita semplicemente come

$$\rho(h) \stackrel{\text{def}}{=} h_*|_p .$$

Tale rappresentazione verrà studiata e utilizzata più volte nei capitoli successivi ed un problema fondamentale per gli sviluppi successivi è quello di avere dei criteri che permettano di determinare i casi in cui tale rappresentazione è fedele, cioè quando ρ è un omomorfismo iniettivo.

Un esempio di rappresentazione non fedele è fornito dallo spazio omogeneo $SL(n+1, \mathbb{R})/H (\cong S^n)$ (cfr. Esempio 6.7): se identifichiamo il laterale $p = eH$ con il punto $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$, è semplice controllare che il sottogruppo di H

$$H' = \{A \in SL(n+1, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & {}^t v \\ 0 & Id \end{pmatrix}\}$$

ha rappresentazione lineare banale su $T_p S^n$.

Una fra le condizioni sufficienti più sfruttate affinché la rappresentazione lineare di isotropia risulti fedele è la seguente.

PROPOSIZIONE 6.14. *Sia $M = G/H$ una varietà omogenea connessa n dimensionale, dotata di una connessione lineare G -invariante (in particolare, se ammette una metrica pseudoriemanniana G -invariante; vedi §II.1). In questo caso la rappresentazione lineare di isotropia di H è fedele e quindi $\dim H \leq n^2$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p = eH$, $h \in H$ un elemento avente una rappresentazione di isotropia banale

$$\rho(h) = Id_{T_p M}$$

e sia ∇ la connessione lineare G invariante (in caso esista una metrica G -invariante $\mathbf{g}$, si può considerare la connessione di Levi Civita). Prendiamo un intorno U di p che sia geodeticamente convesso rispetto alla connessione ∇ ed avremo che, dal momento che ogni punto $q \in U$ è esprimibile come

$$q = \exp_p(X)$$

per qualche $X \in T_p M$, allora

$$h(q) = \exp_p(h_*(X)) = \exp_p(X) = q .$$

Ciò prova che l'insieme $F = \{x \in M : h(x) = x, h_*|_x = Id\}$ è sia aperto che chiuso e quindi coincide con M . $\square$

L'enunciato della proposizione precedente non può essere invertito, nel senso che esistono spazi omogenei G/H senza connessioni lineari G -invarianti, ma con rappresentazione di isotropia fedele. Una condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'esistenza di una connessione lineare invariante è fornita dalla *riduttività*, la cui definizione è la seguente.

DEFINIZIONE 6.15. Una varietà omogenea $M = G/H$ è detta *riduttiva* quando l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G ammette una decomposizione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m},$$

dove $\mathfrak{h}$ è l'algebra di Lie di H e $\mathfrak{m}$ è un sottospazio complementare $Ad(H)$ -invariante.

Si noti che se H è compatto oppure semisemplice, allora G/H è riduttivo. Infatti $Ad|_H$ è una rappresentazione di H che lascia il sottospazio $\mathfrak{h}$ invariato; se H è compatto o semisemplice, ogni sua rappresentazione è semisemplice, da cui l'esistenza del sottospazio $\mathfrak{m}$ complementare e $Ad(H)$ -invariante.

Un classico teorema dovuto a Vinberg (vedi [KoNo] vol. II) afferma che ogni spazio omogeneo riduttivo ammette almeno una connessione lineare invariante. Di conseguenza, dalla Proposizione 6.14 abbiamo subito il seguente:

COROLLARIO 6.15. *La rappresentazione di isotropia di uno spazio omogeneo riduttivo è sempre fedele.*

Sugli spazi omogenei riduttivi esiste una maniera particolarmente semplice per descrivere la rappresentazione lineare di isotropia. Infatti sia $M = G/H$ spazio omogeneo riduttivo con $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ e si consideri la proiezione $\pi: G \rightarrow G/H$; la restrizione del differenziale $\iota \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*|_{\mathfrak{m}}: \mathfrak{m} \rightarrow T_e G/H$ risulta un isomorfismo. Quindi, utilizzando ι , possiamo considerare la rappresentazione $\hat{\rho} = \iota^{-1} \circ \rho \circ \iota$ di H indotta su $\mathfrak{m}$ dalla rappresentazione di isotropia ρ .

Si ha allora che per ogni $X \in \mathfrak{m}$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(h)(X) &= (\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}})^{-1}(h_{*eH}(\pi_{*e}(X))) \\ &= (\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}})^{-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h \exp(tX) H \\ &= (\pi_{*e}|_{\mathfrak{m}})^{-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h \exp(tX) h^{-1} H \\ &= Ad(h)(X), \end{aligned}$$

poichè $\mathfrak{m}$ è $Ad(h)$ -invariante. Ne segue quindi che la rappresentazione $\hat{\rho}$ coincide con la rappresentazione aggiunta di H su $\mathfrak{m}$.

Ulteriore proprietà importante è la seguente (la cui dimostrazione è lasciata per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.16. *Sia $M = G/H$ uno spazio omogeneo riduttivo e sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ la corrispondente decomposizione dell'algebra di Lie di G . Allora esiste una corrispondenza biunivoca fra i campi tensoriali G -invarianti S di tipo (p, q) su M e i tensori di tipo (p, q) su $\mathfrak{m}$ che sono $Ad(H)$ invarianti.*

In particolare, se H è compatto e $\mathfrak{m}$ è un sottospazio irriducibile per l'azione $Ad(H)$, tutte le metriche Riemanniane G -invarianti su M sono fra loro omotetiche.

Concludiamo questa sezione osservando che, se G/H è uno spazio omogeneo con una metrica Riemanniana invariante (e quindi riduttivo in quanto H è compatto), allora si può sempre dotare G di una metrica Riemanniana invariante a sinistra e tale che la proiezione π risulti una sommersione Riemanniana (vedi [Bes]).

§6.4 Varietà omogenee compatte.

Concludiamo la discussione sulle varietà omogenee analizzando alcune proprietà delle varietà omogenee compatte che consideriamo particolarmente interessanti.

Nell'esempio 6.8, abbiamo discusso tutte le possibili rappresentazioni della sfera come spazio omogeneo G/H , con G connesso e compatto; e abbiamo anche visto che tuttavia non necessariamente un gruppo G che agisce transitivamente sulla sfera debba essere un gruppo compatto. Dal momento che i gruppi di Lie compatti posseggono molteplici proprietà e sono tutti classificati risulta importante rispondere alla seguente domanda: a quali condizioni deve soddisfare una varietà M omogenea compatta per ammettere un gruppo compatto G che agisca transitivamente? Il seguente risultato, dovuto a Montgomery (vedi [Mon]), fornisce delle condizioni topologiche che permettono di rispondere a questo quesito in parecchie situazioni.

TEOREMA 6.17. *Se $M = G/H$ è una varietà omogenea compatta, connessa e con gruppo fondamentale finito, allora esiste un sottogruppo compatto $K \subseteq G$ che agisce transitivamente su M .*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo innanzitutto supporre che G sia connesso, eventualmente sostituendolo con la sua componente connessa dell'identità. Sia H il sottogruppo di isotropia di un punto $m \in M$ e consideriamo la successione esatta lunga di omotopia per la fibrazione $\pi : G \rightarrow M$

$$\cdots \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_0(H) \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow \{0\} \quad .$$

Dal fatto che $\pi_1(M)$ è finito, segue che H possiede un numero finito di componenti connesse. Consideriamo dapprima il caso in cui H è connesso e poi estenderemo il risultato al caso generale.

Una proprietà classica dei gruppi di Lie (vedi e.g. [Hel]), afferma che, se G è connesso, allora è esprimibile come prodotto

$$G = K \cdot E \tag{6.4.1}$$

con K sottogruppo compatto massimale ed E sottogruppo diffeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Dal momento che H è connesso, lo stesso risultato permette di esprimerlo come

$$H = L \cdot F \tag{6.4.2}$$

con L compatto e $F \cong \mathbb{R}^q$. È altresì noto che i gruppi massimali compatti di un gruppo di Lie sono unici a meno di coniugio (vedi e.g. [Hel]). Perciò è sempre possibile determinare K in modo tale che $L \subseteq K$. Consideriamo ora le due fibrazioni

$$p_1 : G/L \rightarrow G/K \qquad p_2 : G/L \rightarrow G/H \quad .$$

Per la (6.4.1), G/K è diffeomorfo ad uno spazio euclideo e quindi la fibrazione p_1 è banale. Di conseguenza $G/L \simeq K/L \times \mathbb{R}^n$ e K/L è omeomorfo ad un retratto per deformazione di G/L .

Allo stesso tempo, tutte le fibre di p_2 sono diffeomorfe a $H/L \simeq \mathbb{R}^q$ e sono quindi contraibili. Allora esiste una sezione globale

$$\sigma : M \simeq G/H \rightarrow G/L$$

(si veda [Hus]) e la sottovarietà $\sigma(M) \cong M$ risulterà anch'essa un retratto per deformazione di G/L .

Possiamo allora dedurre che le proprietà omologiche di M e di K/L devono essere le stesse. Essendo M compatto, esiste un ciclo z di dimensione $n = \dim M$ che non è omologo a 0 e questo implica che anche l'omologia $H_n(K/L)$ non è banale. Quindi

$$n = \dim M \leq \dim(K/L) .$$

D'altra parte, se consideriamo il punto $m = eH \in M$ e l'orbita $K(m)$, si ha che

$$K(m) \cong K/(K \cap H) = K/L$$

perchè L è un sottogruppo massimale compatto di H . Quindi

$$\dim M \geq \dim K(m) = \dim K/L \geq \dim M$$

e si conclude che $K(m) = M$, cioè K agisce transitivamente su M .

Nel caso in cui H non sia connesso, sia H° la componente connessa dell'identità e si osservi che la fibrazione

$$p_3: G/H^\circ \rightarrow G/H$$

è un rivestimento finito essendo H/H° finito. Poichè G/H è compatto, anche G/H° è compatto e, per quanto già dimostrato, il sottogruppo massimale compatto K agisce transitivamente su G/H° e quindi anche su G/H . $\square$

Il precedente risultato viene raffinato dal seguente Teorema.

TEOREMA 6.18. *Sia $M = G/H$ una varietà omogenea compatta, connessa, con gruppo fondamentale finito e G compatto. Allora il sottogruppo massimale semisemplice S agisce transitivamente su M .*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che se G è un gruppo compatto e connesso, allora si esprime in modo unico come

$$G = S \cdot Z$$

dove S è un sottogruppo massimale semisemplice e Z è il centro di G . S è univocamente determinato ed è un sottogruppo chiuso, connesso e normale di G . Segue dunque che il sottogruppo SH è sempre un sottogruppo chiuso e normale.

Dal momento che G/S è isomorfo a Z , abbiamo che G/HS è isomorfo ad un sottogruppo compatto abeliano di Z e quindi ad un toro. Consideriamo ora la fibrazione

$$p_1: G/H \rightarrow G/SH .$$

La fibra è diffeomorfa a HS/H e quindi è connessa essendo S connesso. Dalla sequenza esatta lunga di omotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_1(G/H) \rightarrow \pi_1(G/HS) \rightarrow \pi_0(HS/H) = 0 \rightarrow \cdots$$

e dal fatto che $\pi_1(G/H)$ è finito, abbiamo che anche $\pi_1(G/HS)$ è finito. Ma essendo G/HS un toro, questo può accadere solo se è ridotto ad un punto, ovvero se e solo se $G = H \cdot S$. Questo mostra che S agisce transitivamente su G/H . $\square$

Limitiamoci ora a considerare varietà omogenee compatte $M = G/H$ con G compatto. Come vedremo, molte informazioni sul gruppo G possono essere dedotte dalla caratteristica di Eulero $\chi(M)$ di M .

Comunque, per enunciare questi risultati, ricordiamo dapprima una coppia di definizioni, riguardanti oggetti classici nella teoria dei gruppi di Lie compatti. Se G è un gruppo di Lie compatto, si dice *rango di G* la dimensione di un suo toro massimale T (cioè di un sottogruppo abeliano massimale compatto). Si ricordi che tutti i tori massimali di un gruppo compatto sono coincidenti fra loro a meno di coniugio e che ogni elemento $a \in G$ appartiene ad almeno un toro massimale. Il *gruppo di Weyl* $W(G)$ di G è invece il quoziente $N(T)/T$, per un qualunque toro massimale $T \subset G$, dove $N(T)$ è il normalizzatore di T in G . Il gruppo di Weyl di un gruppo compatto è sempre un gruppo discreto.

TEOREMA 6.19. *Sia $M = G/H$ una varietà omogenea compatta, connessa e con il gruppo G compatto. Allora:*

- a) $\chi(M) \geq 0$;
- b) $\chi(M) > 0$ se e solo se H ha lo stesso rango di G ; inoltre, $\pi_1(G/H) \cong H/H^o$;
- c) $\chi(M) = \frac{w(G)}{w(H)}$, dove $w(G)$ e $w(H)$ sono gli ordini dei gruppi di Weyl di G e di H , rispettivamente.

In particolare, se T è un toro massimale di un gruppo compatto G ed $N(T)$ è il suo normalizzatore, si ha che

$$\chi(G/T) = w(G) \quad , \quad \chi(G/N(T)) = 1 \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo alcuni fatti ben noti sulla caratteristica di Eulero. Se f è un diffeomorfismo di una varietà compatta M con un numero finito di punti fissi $\{p_i\}_{i=1\dots k}$ aventi indice $m_i = \text{sign det}(df|_{p_i} - Id)$, il numero di Lefschetz λ_f è dato da

$$\lambda_f = (-1)^n \sum_i m_i.$$

Inoltre se f è omotopa all'identità, è ben noto che $\lambda_f = \chi(M)$. Proviamo ora il seguente

LEMMA 6.20. *Sia $f \in G$ con un punto fisso isolato in M . Allora l'indice di tale punto fisso è $(-1)^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto si osservi che il differenziale df_p , dove p indica il punto fisso, non può avere autovalori reali positivi: infatti, rispetto ad una metrica Riemanniana $\mathbf{g}$ G -invariante, df_p è una isometria di $(T_p M, \mathbf{g})$ e se λ fosse un tale autovalore con autovettore relativo $v \in T_p M$ dovrebbe essere $\lambda = \pm 1$ e la trasformazione f dovrebbe fissare ogni punto della geodetica $\exp(tv)$. Questo contraddice il fatto che p è un punto fisso isolato. Ne segue che $\det(df_p - tId)$ non è

mai nullo e che quindi il segno di $\det(df_p - Id)$ è uguale al segno del $\det(df_p - tId)$ per t reale positivo grande, ovvero $(-1)^n$. $\square$

Ne segue che, se $f \in G$ possiede un numero finito di punti fissi, il numero di tali punti fissi è pari a $\chi(M)$. Proviamo allora il seguente

LEMMA 6.21. *Esiste un elemento $a \in G$ che ha solo un numero finito di punti fissi in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia T un toro massimale di G e sia $a \in T$ un elemento tale che il sottogruppo da esso generato sia denso in T . Un punto $p = xH \in M$ è fisso per a se e solo se $x^{-1}ax \in H$. Dal momento che a genera T , questo significa che p è fisso se e solo se

$$x^{-1}Tx \subset H \quad .$$

Dunque, se H ha rango minore del rango di G , a non possiede punti fissi e quindi $\chi(M) = 0$. Se invece il rango di H è pari a quello di G , possiamo, a meno di coniugio, supporre che T sia contenuto in H e dunque essere anche un toro massimale di H . Se $x \in G$ è tale che $x^{-1}Tx \subset H$ esiste un elemento $h \in H$ tale che $x^{-1}Tx = hTh^{-1}$, poichè due tori massimali sono coniugati. Ciò significa che l'elemento xh appartiene al normalizzatore $N(T)$ ovvero che una classe xH rappresenta un punto fisso di a se e solo se xH contiene un elemento di $N(T)$. Ma se $y \in xH \cap N(T)$, poichè $T \subset H$, si ha $yT \subset xH$; poichè il gruppo di Weyl $N(T)/T$ è finito, ne segue che esistono solo un numero finito di classi xH che contengono classi laterali yT , $y \in N(T)$ e con ciò il Lemma è dimostrato. $\square$

Dalla dimostrazione del Lemma 6.21, segue anche l'affermazione sul rango del sottogruppo H . Abbiamo provato che se a genera T , allora xH rappresenta un punto fisso di a se e solo se xH contiene una classe laterale yT con $y \in N(T)$. Ne segue che esiste un'applicazione surgettiva

$$\phi : N(T)/T \rightarrow \text{Fix}(a)$$

che ad ogni classe laterale yT associa il punto rappresentato dall'unica classe laterale xH tale che $yT \subset xH$. Due classi laterali yT e $y'T$ danno lo stesso punto fisso se e solo se $y'^{-1}y \in N(T) \cap H = N_H(T)$, ovvero se e solo se hanno la stessa proiezione sul gruppo $N_H(T)/T$. Ne segue $\chi(M)$ è pari alla cardinalità di $\text{Fix}(a)$, che è uguale all'indice $[W : H'/T]$, dove $W = N(T)/T$ è il gruppo di Weyl.

Resta ora da dimostrare l'asserzione riguardo al gruppo fondamentale nel punto b).

Si consideri il rivestimento finito $G/H^\circ \rightarrow G/H$; mostreremo che G/H° è semplicemente connesso, concludendo così la dimostrazione. Infatti, sia T un toro massimale per H° , che è massimale anche per G e si consideri la fibrazione $G/T \rightarrow G/H^\circ$ con fibra tipica H°/T connessa. Per la successione esatta lunga di omotopia, basta dimostrare che G/T è semplicemente connesso, ovvero che l'iniezione $T \hookrightarrow G$ induce un epimorfismo $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(G)$. Dotiamo G di una metrica biinvariante e prendiamo un laccio γ puntato in e . Poichè ogni classe di

omotopia di lacci in G contiene un laccio geodetico ed ogni geodetica di una metrica biinvariante è un sottogruppo ad un parametro (vedi [GHL]), sia $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow G$ un sottogruppo tale che

$$\sigma(\alpha) = e \quad , \quad [\sigma|_{[0,\alpha]}] = [\gamma] \quad .$$

Il sottogruppo abeliano $\sigma(\mathbb{R})$ è contenuto in un toro massimale e quindi esiste $g \in G$ tale che $g\sigma(t)g^{-1} \in T$, $t \in \mathbb{R}$; poichè G è compatto, $g = \exp(X)$ per qualche $X \in \mathfrak{g}$. Di conseguenza, l'applicazione

$$(s, t) \mapsto \exp(sX)\sigma(t)\exp(-sX)$$

costituisce un'omotopia di σ con $g\sigma g^{-1}$ e quindi $[\gamma] = [g\sigma g^{-1}]|_{[0,\alpha]}$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

Il Teorema 6.19 porta a molte conseguenze interessanti, fra cui i seguenti tre corollari.

COROLLARIO 6.22. *Se $M = G/H$ è una varietà omogenea compatta, connessa con G compatto e $\chi(M) = 0$, allora nessuna trasformazione $a \in G$ ammette punti fissi isolati.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p = xH$ un punto fisso isolato della trasformazione $a \in G$. Questo implica non solo che $x^{-1}ax \in H$, ma anche che, se T è un toro massimale contenente a ,

$$(tx)^{-1}a(tx) = x^{-1}(t^{-1}at)x = x^{-1}ax \in H$$

per ogni $t \in T$. Allora, tutti i punti di $T(xH)$ sono punti fissi di a ed essendo x isolato, questo implica che

$$T(xH) \subseteq xH$$

cioè $x^{-1}Tx \subseteq H$. Ma allora il rango di H è uguale al rango di G e quindi $\chi(M) > 0$ per il Teorema 6.19: contraddizione. $\square$

COROLLARIO 6.23. *Sia $M = G/H$ varietà omogenea, compatta, connessa, con G compatto e con azione effettiva. Se $\chi(M) \neq 0$ allora il centro di G è banale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\chi(M) \neq 0$, G e H hanno lo stesso rango e qualunque toro massimale T di H è un toro massimale per G . D'altra parte, ogni toro massimale di G deve contenere il centro Z e quindi possiamo concludere che $Z \subseteq H$. Dal momento che G agisce in modo effettivo, l'unico sottogruppo normale contenuto in H è il gruppo banale $\{e\}$ e da qui la tesi. $\square$

COROLLARIO 6.24. *Sia $M = G/H$ una varietà omogenea compatta e semplicemente connessa, con G compatto ed azione effettiva. Se $\chi(M)$ è un numero primo, allora G è semplice.*

Per la dimostrazione di questo corollario, rimandiamo a [Bor2].

Vogliamo completare la discussione sulla caratteristica di Eulero delle varietà omogenee compatte fornendo una formula integrale per il suo calcolo.

Sia $M = G/K$ con G compatto e sia $d\mu$ la misura biinvariante di Haar su K . Indichiamo poi con $\rho : K \rightarrow GL(T_{[eK]}M)$ la rappresentazione lineare di isotropia mentre con ρ^p l'azione indotta sullo spazio $\Lambda^p(T_{[eK]}M)^K$ dato dalle p -forme su $T_{[eK]}M$ che sono $\Lambda^p(\rho(K))$ -invarianti. Si osservi che $\Lambda^p(T_{[eK]}M)^K$ è anche isomorfo allo spazio delle p -forme differenziali su M che sono G -invarianti. Dal momento che il complesso $\Lambda^*(T_{[eK]}M)^K$ determina la coomologia di M , otteniamo che

$$\chi(M) = \sum_p (-1)^p \dim \Lambda^p(T_{[eK]}M)^K .$$

Si osservi ora che l'operatore $\int_K \rho^p(k) d\mu(k) \in GL(\Lambda^p(V))$ è idempotente, da cui segue che

$$\int_K \text{Tr } \rho^p(k) d\mu(k) = \dim \Lambda^p(V)^K .$$

In conclusione, abbiamo la seguente interessante formula integrale

$$\chi(M) = \sum_p (-1)^p \int_K \text{Tr } \rho^p(k) d\mu(k) = \int_K \det(I - \rho(k)) d\mu(k) , \quad (6.4.3)$$

conseguenza di una nota formula di algebra lineare.

Concludiamo infine questa sezione sulle varietà omogenee compatte con un teorema che permette di determinare il gruppo di trasformazioni G a partire dai numeri di Betti della varietà.

TEOREMA 6.26. *Sia $M = G/H$ una varietà omogenea compatta e connessa, con G compatto, connesso e con azione effettiva. Se per qualche intero $1 \leq j \leq \dim M = n$, il j -esimo numero di Betti verifica*

$$b_j(M) = \binom{n}{j}$$

allora G è un toro e $H = \{e\}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $M = G/H$, dove H è il sottogruppo di isotropia di G in $p \in M$. Indichiamo poi con $\Omega^j(G/H)$ lo spazio delle j -forme su G/H e con $\Omega^j(G/H)^G$ il sottospazio di quelle G -invarianti. Se $n_j = \dim \Omega^j(G/H)^G$, è chiaro che

$$b_j(M) \leq n_j \leq \binom{n}{j},$$

poichè ogni forma chiusa è coomologa ad una forma chiusa G -invariante (usando un semplice procedimento di integrazione) ed inoltre ogni forma G -invariante è determinata dal valore che assume in un punto.

Indichiamo ora con $\rho : H \rightarrow GL(V)$ la rappresentazione di isotropia in p , dove $V \cong T_p M$ e con $\rho^{(j)} : H \rightarrow GL(\Lambda^j(V))$ la rappresentazione indotta $\Lambda^j(V)$. Con tale notazione, abbiamo che

$$\Omega^j(G/H)^G \cong \Lambda^j(V)^{\rho^{(j)}(H)}.$$

Poichè per ipotesi $b_j(M) = \binom{n}{j}$, abbiamo che $n_j = \binom{n}{j} = \dim \Lambda^j(V)$ e quindi $\Lambda^j(V) = \Lambda^j(V)^{\rho^{(j)}(H)}$, ovvero ogni elemento di H agisce come l'identità su $\Lambda^j(V)$. Da un semplice argomento di algebra lineare segue che $\rho(H) \in \{\pm Id\}$ e quindi, essendo la rappresentazione ρ fedele, H è finito. Pertanto la fibrazione $G \rightarrow G/H$ è un rivestimento e quindi

$$\binom{n}{j} = b_j(M) \leq b_j(G) \leq \binom{n}{j},$$

forzando $b_j(G) = \binom{n}{j}$. Ma allora, usando lo stesso argomento, possiamo provare che $Ad(G) = \{Id\}$, essendo G connesso, e quindi G risulta abeliano. Poichè l'azione di G è effettiva, H è banale e l'azione è libera. Inoltre G , essendo compatto, connesso e abeliano, è un toro. $\square$

Il Teorema 6.26 permette di determinare immediatamente qualunque gruppo compatto di azioni effettive su un toro.

COROLLARIO 6.27. *Se G è un gruppo compatto e connesso, che agisce transitivamente su un toro T , allora $G = T$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue direttamente dal Teorema 6.26 e dal fatto che

$$b_j(T) = \binom{\dim T}{j}$$

per ogni $1 \leq j \leq \dim T$. $\square$

Per quanto riguarda, più in generale, la determinazione della coomologia di uno spazio omogeneo, rimandiamo a [BoHi].

CAPITOLO II

G-STRUTTURE E LORO AUTOMORFISMI**§1. Il fibrato dei riferimenti lineari e le G -strutture su M .**

Ricordiamo qui velocemente le nozioni fondamentali sui fibrati principali e sul fibrato dei riferimenti lineari. Un *fibrato principale* sulla varietà M con gruppo strutturale G è una varietà P su cui è definita un'azione libera del gruppo di Lie G

$$R : G \times P \rightarrow P$$

$$(g, p) \mapsto R_g p \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot g$$

che soddisfa alle seguenti condizioni:

1) M è lo spazio delle orbite P/G e la proiezione canonica $\pi : P \rightarrow M$ è differenziabile;

2) La fibrazione $\pi : P \rightarrow M$ è localmente banale, ovvero per ogni $x \in M$ esiste un intorno U di x tale che $\pi^{-1}(U)$ è G -equivalente a $U \times G$ (dove l'azione di G su $U \times G$ è il prodotto dell'azione banale su U per l'azione a destra di G su se stesso).

Come vedremo nel capitolo successivo, in caso l'azione di G risulti essere propria, la condizione 2) diventa equivalente ad affermare che le orbite di G su P sono tutte regolari.

La varietà M è detta *base* del fibrato P , mentre, per ogni punto $x \in M$, l'insieme $\pi^{-1}(x)$ (che coincide con un'orbita di G) è detto *fibra su x* ; poichè l'azione è libera, ogni fibra è diffeomorfa a G .

Una *sezione locale* di un fibrato P con base M è una applicazione σ liscia

$$\sigma : U \subset M \rightarrow P$$

tale che

$$\pi \circ \sigma = id|_U .$$

Si noti che P è *banale*, ovvero è G -equivalente a $M \times G$, se e solo se esiste una sezione globale.

Se A è un qualunque elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{G}$ di G e se chiamiamo Σ l'azione di G su P , la trasformazione infinitesima corrispondente $A^* \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\Sigma*}(A)$ (vedi §I.3) è di solito chiamata, nella terminologia dei fibrati, *campo fondamentale corrispondente ad A* .

Abbiamo detto che l'azione di G , la cui algebra di Lie denoteremo con $\mathfrak{G}$, è libera e dunque è bene ricordare che, fissato un qualunque punto $u \in P_G$, l'omomorfismo $val_u : \mathfrak{G} \rightarrow T_u P_G$ dato da

$$val_u(A) = A_u^* \quad (1.1)$$

è in realtà un omomorfismo iniettivo; l'immagine poi di val_u coincide esattamente con lo spazio tangente alla fibra $\pi^{-1}(\pi(u))$.

Se $G_1 \subset G_2$ sono due gruppi di Lie, e se P_1 e P_2 denotano due fibrati principali con gruppi strutturali G_1 e G_2 rispettivamente, diremo che P_1 è un *sottofibrato* di P_2 se esiste un'immersione regolare G_1 -equivariante $\phi : P_1 \rightarrow P_2$. Dalle definizioni risulta che l'applicazione indotta fra le basi $\tilde{\phi} : M_1 \rightarrow M_2$ è un'immersione regolare. Nel seguito, per ogni *sottofibrato* $\phi : P_1 \rightarrow P_2$, identificheremo M_1 con la sua immagine $\tilde{\phi}(M_1) \subseteq M_2$ e, nel caso particolare in cui tale immagine $\tilde{\phi}(M_1)$ coincida con M_2 , diremo che il sottofibrato P_1 è una *riduzione* di P_2 .

Se P_1 e P_2 sono due fibrati principali con lo stesso gruppo strutturale G e la stessa base M , un diffeomorfismo locale $f : U \subseteq P_1 \rightarrow P_2$ viene detto una *equivalenza locale fra i fibrati* P_1 e P_2 se è una equivalenza locale per quanto riguarda l'azione di G (vedi §I.2). Gli stessi due fibrati saranno chiamati *isomorfi* se esiste una equivalenza globale $f : P_1 \rightarrow P_2$.

Ogni equivalenza (locale o globale) fra fibrati, trasforma G -orbite in G -orbite. Segue dunque che la distribuzione *verticale* $\mathcal{V}$, definita da

$$\mathcal{V}_u = T_u(\pi^{-1}(\pi(u)))$$

è invariante per ogni automorfismo (locale o globale) φ del fibrato P . Altra conseguenza è che, se una distribuzione $\mathcal{D}$ su P è complementare a $\mathcal{V}_u$ per ogni $u \in P$, allora, per ogni automorfismo φ , anche la distribuzione $\mathcal{D}' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_*(\mathcal{D})$ è complementare a $\mathcal{V}$ in ogni punto di P .

Fra le distribuzioni $\mathcal{D}$ complementari a $\mathcal{V}$, le più importanti sono le cosiddette connessioni.

DEFINIZIONE 1.1. Si dice *connessione su un fibrato principale* P , con gruppo strutturale G , una distribuzione regolare $\mathcal{H}$, di classe C^∞ , che verifica, per ogni $u \in P$ ed ogni $g \in G$, le seguenti due condizioni:

- a) $T_u P = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$;
- b) $(R_g)_*(\mathcal{H}_u) = \mathcal{H}_{u \cdot g}$.

Un argomento basato sulla locale banalità del fibrato P , nonché l'utilizzo di una partizione dell'unità, mostra immediatamente l'esistenza di almeno una connessione su un qualunque fibrato principale (si noti che sul fibrato banale $M \times G$ esiste una connessione naturale).

Si osservi che ogni automorfismo f del fibrato P trasforma una qualunque connessione $\mathcal{H}$ in una distribuzione

$$\mathcal{H}' = f_* \mathcal{H}$$

che è anch'essa una connessione.

Data una classe $\mathcal{F}$ di automorfismi di P , una connessione viene dichiarata *canonica* (in riferimento alla classe $\mathcal{F}$) se è tale che

$$\mathcal{H} = f_* \mathcal{H}$$

per tutti gli automorfismi f della classe $\mathcal{F}$.

Assegnare una connessione su P è equivalente ad assegnare una 1-forma ω su P a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{G}$, detta *forma di connessione*, tale che

a) $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{G}$;

b) $(R_g)^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega$.

La 1-forma ω determina una distribuzione $\mathcal{H}$ che verifica a) e b) della Definizione 1.1, se si pone

$$\mathcal{H} = \ker \omega .$$

Viceversa, ogni connessione $\mathcal{H}$ determina una 1-forma di connessione ω , come unica 1-forma a valori in $\mathfrak{G}$ tale che $\omega(\mathcal{H}) = 0$ e tale che, per ogni elemento $A \in \mathfrak{G}$,

$$\omega(A^*) = A .$$

Il fibrato principale di maggior rilievo è costituito dal fibrato dei riferimenti lineari su di una varietà M , indicato con $L(M)$. Fissato uno spazio vettoriale V di dimensione pari alla dimensione n di M , un *riferimento lineare* in un punto $x \in M$ è un qualunque isomorfismo

$$u : V \rightarrow T_x M .$$

Nel seguito, chiameremo V *spazio vettoriale modello per TM* . Si noti che, se fissiamo una base ordinata $e_1, \dots, e_n$ di V , assegnare un riferimento lineare u su x è equivalente a determinare una base $X_1 = u(e_1), \dots, X_n = u(e_n)$ per lo spazio vettoriale $T_x M$.

L'insieme $L(M)$ di tutti i riferimenti lineari sui punti di M è dotato di una struttura di varietà differenziabile, su cui il gruppo $G = GL(V)$ agisce liberamente nel modo seguente: se $u \in L(M)$ e $g \in GL(V)$, definiamo $u \cdot g$ come il riferimento

$$u \cdot g : V \rightarrow T_x M$$

$$u \cdot g = u \circ g .$$

La proiezione $\pi : L(M) \rightarrow M$ associa ad ogni riferimento lineare su $x \in M$ il punto x stesso ed è immediato verificare che $M = L(M)/G$. Tale fibrazione è localmente banale. In conclusione, $L(M)$ costituisce un fibrato principale su M .

Sul fibrato $L(M)$ è naturalmente definita la seguente 1-forma ϑ a valori in V , detta *forma canonica* o *forma tautologica*:

$$\vartheta|_u(X) \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(\pi_*(X)), \quad X \in T_u(L(M)) .$$

Dalla definizione stessa, segue che se $g \in GL(V)$, allora

$$(g^* \vartheta)(X) = g^{-1}(\vartheta(X)) \quad \forall X \in TP . \quad (1.2)$$

Inoltre, se usiamo la (1.2) con $g = \exp(tA)$, $A \in \mathfrak{gl}(V)$, otteniamo l'espressione per la derivata di Lie

$$\mathcal{L}_{A^*}\vartheta = -A \cdot \vartheta, \quad (1.3)$$

dove $A \cdot \vartheta(X) = A(\vartheta(X))$ per ogni X campo vettoriale su $L(M)$.

Per ogni diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ esiste un unico diffeomorfismo $\hat{f}$ di $L(M)$ che sia $GL(V)$ -equivariante e che renda il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} L(M) & \xrightarrow{\hat{f}} & L(M) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Tale diffeomorfismo è dato da:

$$\hat{f}(u) = f_* \circ u,$$

ed è immediato verificare che $\hat{f}$ preserva la forma canonica ϑ . Nel seguito chiameremo $\hat{f}$ il diffeomorfismo sollevato di f .

Viceversa, un classico risultato (vedi e.g. [KoNo], vol I, pag. 226) afferma che un diffeomorfismo ϕ di $L(M)$ coincide con il sollevato di un diffeomorfismo f di M se verifica le seguenti due condizioni:

- a) ϕ preserva le fibre di $L(M)$;
- b) ϕ preserva la forma canonica ϑ .

DEFINIZIONE 1.2. Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(V)$. Una G -struttura su M è una riduzione P_G del fibrato $L(M)$ con gruppo strutturale G .

Due G -strutture P_G e P'_G su due varietà della stessa dimensione M e M' sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo f di M su M' che induce un diffeomorfismo sollevato $\hat{f}$ tra $L(M)$ e $L(M')$ tale che $\hat{f}(P_G) = P'_G$. Un automorfismo di P_G è un qualunque diffeomorfismo di M in sè che realizza una equivalenza fra P_G e se stesso.

Indicheremo con $Aut(M, P_G)$ il gruppo di tutti gli automorfismi di M , mentre useremo il simbolo $Aut_{loc}(M, P_G)$ per indicare l'insieme dei diffeomorfismi locali che realizzano equivalenze locali di P_G in sè.

Si osservi che su qualunque G -struttura P_G è naturalmente definita una forma canonica ϑ , che non è altro che la restrizione della forma canonica di $L(M)$. Inoltre, analogamente a quanto detto per $L(M)$, si può dimostrare che un diffeomorfismo h di P_G è il sollevato di un elemento di $Aut(M, P_G)$ se e solo se h è G -equivariante e preserva la forma canonica ϑ di P_G .

Particolarmente importanti sono le strutture con gruppo strutturale banale dato dal solo elemento neutro $\{e\}$. In questo caso, le fibre di $P_{\{e\}}$ sono costituite da un solo punto e quindi ogni $\{e\}$ -struttura è in pratica l'immagine in $L(M)$ di una opportuna sezione globale

$$\sigma : M \rightarrow L(M).$$

Si consideri ora una qualunque connessione $\mathcal{H}$ su una G -struttura P_G e sia ω la corrispondente forma di connessione. Si può allora costruire la 1-forma $\omega \oplus \vartheta$ a valori in $\mathfrak{G} \oplus V$. È chiaro che, per ogni $u \in P$, l'applicazione

$$\omega \oplus \vartheta|_u: T_u P_G \rightarrow \mathfrak{G} \oplus V$$

è un isomorfismo e quindi, se si prende $\mathfrak{G} \oplus V$ come spazio vettoriale modello di TP , $(\omega \oplus \vartheta|_u)^{-1}$ costituisce un riferimento lineare nel punto u . Perciò ogni connessione su P_G determina una ben precisa sezione globale

$$\sigma_{\mathcal{H}}: P \rightarrow L(P)$$

o, in altre parole, una $\{e\}$ -struttura su P .

Viceversa, abbiamo il seguente Lemma.

LEMMA 1.3. *Se una sezione globale σ di $L(P)$ verifica, per ogni punto $u \in P$ ed ogni elemento $g \in G$, le seguenti condizioni:*

- a) $\theta_u(\sigma_u(\mathfrak{G})) = \{0\}$;*
- b) $\sigma_u^{-1}|_{\sigma_u(V)} = \theta_u|_{\sigma_u(V)}$;*
- c) $\sigma_{u \cdot g}|_{\mathfrak{G}} = \sigma_u \cdot \text{Ad}(g^{-1})|_{\mathfrak{G}}$;*

allora la distribuzione

$$\mathcal{H}_u^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_u(V)$$

è una connessione.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.

A questa correlazione fra connessioni e sezioni globali, corrisponde una correlazione fra gli automorfismi di G -strutture con connessioni canoniche e diffeomorfismi che mantengono invariate le corrispondenti sezioni globali. Infatti, se $\mathcal{H}$ è una connessione su P_G , si ha che un diffeomorfismo $g: P_G \rightarrow P_G$ è il sollevato di un automorfismo $f \in \text{Aut}(M, P_G)$ se e solo se la sezione σ' data da

$$\sigma' = g_* \circ \sigma_{\mathcal{H}}$$

verifica le condizioni a), b) e c) del Lemma 1.3 (per la dimostrazione di questo fatto, vedi paragrafo successivo). Di conseguenza, nel caso $\mathcal{H}$ sia una connessione canonica (per quanto riguarda la classe dei diffeomorfismi sollevati di $\text{Aut}(M, P_G)$), un diffeomorfismo g coincide con un diffeomorfismo $\hat{f}$ sollevato di $f \in \text{Aut}(M, P_G)$, se e soltanto se

$$g_* \circ \sigma_{\mathcal{H}} = \sigma_{\mathcal{H}} .$$

Torneremo diffusamente sulle proprietà dei diffeomorfismi che mantengono invariate opportune sezioni del fibrato lineare nel §4.

ESEMPIO 1.4. Sia g una metrica Riemanniana su M . Il *fibrato dei riferimenti ortonormali* $O_g(M)$ è l'insieme dei riferimenti lineari $u \in L(M)$ tali che

$$u^*(g) = \langle, \rangle$$

dove $\langle, \rangle$ è un prefissato prodotto euclideo sullo spazio modello V per TM . La stessa proprietà può enunciarsi dicendo che se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale su $(V, \langle, \rangle)$, un riferimento u appartiene a $O_g(M)$ se e solo se i vettori

$$u(e_i) = X_i$$

costituiscono una base ortonormale rispetto alla metrica Riemanniana g nel punto $\pi(u)$.

$O_g(M)$ è una riduzione di $L(M)$ con gruppo strutturale $O(V, \langle, \rangle)$, cioè il gruppo delle isometrie di $(V, \langle, \rangle)$. Più in generale, una qualunque $O(V, \langle, \rangle)$ -struttura P su M coincide con il fibrato $O_g(M)$ per la metrica Riemanniana g definita su ogni $p \in M$ come

$$g(X, Y)_p = \langle u^{-1}(X), u^{-1}(Y) \rangle$$

per qualche riferimento $u \in \pi^{-1}(p) \subset P$.

Infine, un diffeomorfismo f è un elemento di $Aut(M, O_g(M))$ se e solo se è una isometria per (M, g) .

ESEMPIO 1.5. Su una varietà Riemanniana (M, g) si può sempre considerare il fibrato $CO_g(M) \subset L(M)$ di tutti i riferimenti lineari u tali che

$$u^*(g) = \lambda^2 \langle, \rangle$$

per qualche $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ e per il prodotto euclideo $\langle, \rangle$ sullo spazio V , determinato come nell'Esempio 1.4. $CO_g(M)$ è una riduzione di $L(M)$, chiamata *fibrato dei riferimenti conformi*, il cui gruppo strutturale è

$$CO(V, \langle, \rangle) = \{ A \in End(V) : \exists \lambda \neq 0 \text{ tale che}$$

$$\langle A(X), A(Y) \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in V \}$$

Si osservi che ogni $CO(V, \langle, \rangle)$ -struttura P su una varietà M , ammette sempre una $O(V, \langle, \rangle)$ -riduzione (vedi Es. 1.6) e quindi esiste sempre una metrica Riemanniana su M nella data classe conforme.

Infine, si ricordi che un diffeomorfismo $f: M \rightarrow M$ è una trasformazione conforme per una metrica g se e soltanto se $f \in Aut(M, CO_g(M))$.

ESERCIZIO 1.6. Dimostrare che ogni $CO(V, \langle, \rangle)$ struttura ammette sempre una $O(V, \langle, \rangle)$ -riduzione.

ESEMPIO 1.7. In analogia con i fibrati ortonormali o conformi determinati da un tensore metrico su di una varietà M , è possibile determinare opportune riduzioni di $L(M)$ corrispondenti ad un campo tensoriale S .

Sia S un campo tensoriale su una varietà M e supponiamo che, per ogni coppia di punti $p, q \in M$, esista una applicazione lineare $F: T_p M \rightarrow T_q M$ tale che

$$F^* S_q = S_p .$$

Allora, si può sempre determinare due riduzioni di $L(M)$, che indicheremo con $G_S(M)$ e $\mathbb{P}G_S(M)$ rispettivamente, che verificano :

- a) $f \in \text{Aut}(M, G_S(M))$ se e solo se $f^* S = S$;
- b) $f \in \text{Aut}(M, \mathbb{P}G_S(M))$ se e solo se $f^* S = \lambda_f S$ per qualche funzione reale λ_f che non si annulla mai su M .

La costruzione di queste riduzioni può farsi nel seguente modo. Si consideri un punto $p_o \in M$ e si utilizzi lo spazio vettoriale $V = T_{p_o} M$ come spazio vettoriale modello per tutto TM . Si definisca poi il tensore $\hat{S}$ su V come

$$\hat{S} \stackrel{\text{def}}{=} S_{p_o} .$$

Allora, $G_S(M)$ è dato dall'insieme dei riferimenti u in $L(M)$ tali che

$$u^* S_{\pi(u)} = \hat{S} ,$$

mentre $\mathbb{P}G_S(M)$ è dato come l'insieme dei riferimenti tali che

$$u^* S_{\pi(u)} = \lambda \hat{S}$$

per qualche numero reale $\lambda \neq 0$. Lasciamo al lettore, per esercizio, la verifica che tali sottoinsiemi di $L(M)$ costituiscono delle riduzioni (sugg.: si utilizzi il Lemma 2.1 della prossima sezione).

Sia (M, ω) una varietà simplettica. La costruzione precedente permette di determinare una riduzione $Sp_\omega(M) \subset L(M)$, con gruppo strutturale $Sp(n, \mathbb{R})$, con la proprietà che f è una trasformazione simplettica di (M, ω) se e solo se $f \in \text{Aut}(M, Sp_\omega(M))$.

Se invece θ è una 1-forma definita su tutto M , tale che (M, θ) è una varietà di contatto, un diffeomorfismo f è una trasformazione di contatto per (M, θ) se e solo se è un elemento di $\text{Aut}(M, \mathbb{P}G_\theta(M))$.

Concludiamo ricordando che anche per una struttura quasi-complessa J su M è applicabile la costruzione precedente e che quindi anche il problema della ricerca di biolomorfismi di varietà complesse è riconducibile a quello della determinazione di automorfismi della G -struttura corrispondente alla riduzione $G_J(M)$. In questo ultimo caso, il gruppo strutturale G_J della riduzione è isomorfo a $GL(\frac{n}{2}, \mathbb{C})$.

§2. Connessioni e prolungamenti di G -strutture.

Per ogni G -struttura P_G su una varietà M , un problema fondamentale è costituito dallo studio del gruppo $Aut(M, P_G)$. Una tecnica di base a riguardo fu introdotta da E. Cartan ed è stata successivamente formalizzata con l'introduzione del concetto di *prolungamento di una G -struttura*. Come vedremo, esiste un procedimento canonico che associa ad ogni sottogruppo di Lie G di $GL(V)$ un opportuno sottogruppo abeliano $G^{(1)}$ di $GL(\mathfrak{G} \oplus V)$. Corrispondentemente a questo gruppo abeliano $G^{(1)}$, esiste un modo canonico di costruire sulla G -struttura P_G una $G^{(1)}$ struttura $P_G^{(1)} \subset L(P_G)$, soddisfacente alla seguente proprietà: ogni diffeomorfismo ϕ di P_G risulta un elemento di $Aut(P_G, P_G^{(1)})$ se e solo se è il diffeomorfismo sollevato di un elemento in $Aut(M, P_G)$. Questa costruzione può essere ripetuta su $P_G^{(1)}$ e porta a considerare una $G^{(2)}$ struttura $P_G^{(2)} \subset L(P_G^{(1)})$ e così via. Un fatto essenziale è che, per una classe particolarmente rilevante di sottogruppi $G \subset GL(V)$, esiste un intero n tale per cui il gruppo $G^{(n)}$ è il gruppo banale $\{e\}$. Sicchè, per le corrispondenti G strutture, il problema della determinazione di $Aut(M, P_G)$ si riduce a dover caratterizzare gli automorfismi di una $\{e\}$ -struttura. Quest'ultimo problema è affrontato nei paragrafi §4 e §5.

Fissato un punto $u \in P_G$, diremo che un sottospazio H di $T_u P_G$ è *orizzontale* se $\pi_*|_H : H \rightarrow T_{\pi(u)} M$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. In tal caso la restrizione della forma canonica $\vartheta|_H : H \rightarrow V$ è anch'essa un isomorfismo.

In analogia a quanto detto a proposito delle connessioni su P_G (vedi §1), osserviamo che ogni sottospazio orizzontale H in $u \in P_G$, determina un riferimento lineare di P_G in u : infatti, l'applicazione $l_H : \mathfrak{G} \oplus V \rightarrow T_u P_G$ definita da

$$\begin{aligned} l_H(A) &= A^*|_u \quad , \quad A \in \mathfrak{G} \\ l_H(v) &= (\vartheta|_H)^{-1}(v) \quad , \quad v \in V \end{aligned} \tag{2.1}$$

è un isomorfismo lineare. Di conseguenza la famiglia di tutti i sottospazi orizzontali di P_G è in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme Z di $L(P_G)$ definito da

$$Z = \{l : \mathfrak{G} \oplus V \rightarrow T_u P_G : \vartheta \circ l|_V = Id, \ l|_{\mathfrak{G} \oplus \{0\}} = val_u\}$$

(si veda (1.1) per la definizione dell'applicazione val_u).

Vogliamo ora verificare che Z è una riduzione del fibrato $L(P_G)$. Si osservi che un qualunque elemento $h \in GL(\mathfrak{G} \oplus V)$ può essere rappresentato da una matrice a blocchi

$$h = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

con $B \in End(\mathfrak{G})$, $C \in Hom(V, \mathfrak{G})$, $D \in Hom(\mathfrak{G}, V)$ e $E \in End(V)$. Se $l \in Z$, allora $l \circ h \in Z$ se e solo se $B = Id$, $D = 0$ e $E = Id$. Di conseguenza, l'intersezione di Z con una qualunque fibra di $L(P_G)$ coincide con un'orbita per l'azione del sottogruppo abeliano $K \subset GL(\mathfrak{G} \oplus V)$ dato da

$$K = \{h \in GL(\mathfrak{G} \oplus V) : \exists f \in Hom(V, \mathfrak{G}) \text{ tale che}$$

$$h|_{\mathfrak{G}} = Id, \quad h(v) = v + f(v) \quad \forall v \in V \} .$$

Inoltre, data una sezione locale $\sigma: U \subset M \rightarrow P_G$, per ogni punto $p \in U$, il sottospazio vettoriale

$$H_{\sigma(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_*(T_p M)$$

è orizzontale e l'applicazione $\psi: U \rightarrow L(P_G)$ data da

$$\psi(p) = l_{H_{\sigma(p)}} \quad (2.2)$$

è sempre a valori in Z . Possiamo allora concludere che Z è una riduzione di $L(P_G)$, per via del seguente

LEMMA 2.1. *Sia Q un sottoinsieme di un fibrato principale P con base N , gruppo G e proiezione π . Sia K un sottogruppo di G e assumiamo che:*

- 1) $\pi(Q) = M$;
- 2) Q è K -stabile;
- 3) se $u, v \in Q$, allora $\pi(u) = \pi(v)$ se e solo se u appartiene alla K -orbita per v ;
- 4) per ogni $n \in N$, esiste un intorno U di n ed una sezione $\psi: U \rightarrow P$ con $\psi(U) \subset Q$.

Allora Q è una riduzione di P con gruppo di struttura K .

(Per la dimostrazione di questo lemma, rimandiamo a [KoNo], vol I).

Vale ora il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 2.2. *Un diffeomorfismo ϕ di P_G appartiene a $\text{Aut}(P_G, Z)$ se e solo se ϕ coincide con il sollevato $\hat{f}$ di un automorfismo in $f \in \text{Aut}(M, P_G)$.*

DIMOSTRAZIONE. È lasciata per esercizio, ricordando che un diffeomorfismo di P_G è il sollevato di un diffeomorfismo di M se e solo se commuta con l'azione del gruppo strutturale e lascia la forma canonica invariata.

A questo punto, cerchiamo di ottenere un'ulteriore riduzione del fibrato Z , che tuttavia mantenga la proprietà enunciata dalla Proposizione 2.2.

Per ogni riferimento lineare $l \in Z$, si consideri il corrispondente sottospazio orizzontale H_l del punto $u = \pi(l) \in P_G$. La restrizione di $d\vartheta$ al prodotto $H_l \times H_l$ determina un'applicazione $c_{H_l}: \Lambda^2(V) \rightarrow V$ definita come segue:

$$c_{H_l}(v_1 \wedge v_2) = d\vartheta(\vartheta|_{H_l}^{-1}(v_1), \vartheta|_{H_l}^{-1}(v_2)) .$$

Se consideriamo una base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ di V e se $\{\vartheta^i\}_{i=1, \dots, n}$ sono le corrispondenti 1-forme tali che

$$\vartheta = \sum_{i=1}^n \vartheta^i e_i ,$$

la scelta di un sottospazio orizzontale H è equivalente alla determinazione di n vettori indipendenti $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$, tali che

$$\vartheta^i(X_j) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n . \quad (2.3)$$

Infatti il sottospazio H generato da questi vettori $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ risulta essere un sottospazio orizzontale e, per ciascun indice i , $X_i = \vartheta|_H^{-1}(e_i)$.

Si può verificare che gli n vettori $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ possono essere estesi a n campi vettoriali C^∞ in un intorno opportuno di u in modo da verificare in ogni punto la (2.3). Si osservi però che i coefficienti

$$c_{ij}^k \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\vartheta^k([X_i, X_j]) = d\vartheta^k(X_i, X_j) \quad (2.4)$$

non dipendono dal modo in cui i vettori $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ sono stati estesi a campi locali. D'altra parte, dalla definizione stessa dell'applicazione c_H , risulta che i coefficienti $\{c_{ij}^k\}$ sono anche dati da

$$\sum_k c_{ij}^k e_k = c_H(e_i, e_j) . \quad (2.5)$$

Di conseguenza, la (2.4) fornisce un metodo pratico per il computo dell'applicazione c_H .

Tramite la sua azione sui riferimenti $l \in Z$, vediamo di determinare come agisce il gruppo strutturale K sulle corrispondenti applicazioni c_{H_l} . Ricordiamo che per ogni $h \in K$ ed ogni $A \in \mathfrak{G}$ e $v \in V$, $h(A) = A$ mentre $h(v) = v + f_h(v)$ dove $f_h \in \text{Hom}(V, \mathfrak{G})$. Siano ora H_l e $H_{l \cdot h}$ i due sottospazi orizzontali corrispondenti ai riferimenti $l \in Z$ ed $l \cdot h \in Z$, rispettivamente. Dati due vettori qualunque $v, w \in V$, vogliamo valutare la differenza

$$(c_H - c_{H'})(v \wedge w).$$

Per fare ciò, prendiamo i vettori X, Y in H_l e X', Y' in $H_{l \cdot h}$, dati da

$$X = l(v) \quad X' = l \cdot h(v) = l(v) + (f_h(v))^* ,$$

$$Y = l(w) \quad Y' = l \cdot h(w) = l(w) + (f_h(w))^* .$$

Per definizione, si ha che $\vartheta(X) = \vartheta(X') = v$ e $\vartheta(Y) = \vartheta(Y') = w$. Allora

$$\begin{aligned} (c_{H_{l \cdot h}} - c_{H_l})(v \wedge w) &= d\vartheta(X', Y' - Y) + d\vartheta(X' - X, Y) = \\ &= -d\vartheta(X', (f_h(w))^*) + d\vartheta((f_h(v))^*, Y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ricordiamo ora che, per la (2.3), si possono estendere in un modo qualunque i vettori X, X', Y e Y' a campi locali, ed otteniamo

$$\begin{aligned} 2d\vartheta(X, (f_h(w))^*) &= X\vartheta((f_h(w))^*) - (f_h(w))^*\vartheta(X) - \vartheta([X, (f_h(w))^*]) \\ &= -\mathcal{L}_{(f_h(w))^*}\vartheta(X) = f_h(w) \cdot v \end{aligned}$$

Con calcoli simili per il secondo addendo, abbiamo che

$$(c_H - c_{H'})(v \wedge w) = \frac{1}{2}(f_h(w) \cdot v - f_h(v) \cdot w) . \quad (2.7)$$

Si definisce come *operatore di Spencer* la seguente applicazione di antisimmetrizzazione

$$\partial : \text{Hom}(V, \mathfrak{G}) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2(V), V)$$

$$(\partial f)(v \wedge w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(f(w)v - f(v)w)$$

per ogni $v, w \in V$. In base a questa definizione, la (2.7) si esprime come

$$c_{H_{l \cdot h}} - c_{H_l} = \partial f_h \in \partial(\text{Hom}(V, \mathfrak{G})) . \quad (2.8)$$

Prendiamo ora un sottospazio lineare C di $\text{Hom}(\Lambda^2(V), V)$ che sia complementare all'immagine dell'operatore di Spencer

$$\text{Hom}(\Lambda^2(V), V) = C \oplus \partial(\text{Hom}(V, \mathfrak{G})) .$$

Abbiamo allora il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 2.3. *Per ogni scelta del sottospazio complementare C , l'insieme dei riferimenti lineari in $L(P_G)$ definito da*

$$P_G^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in Z : c_{H_l} \in C\}$$

è una riduzione di $Z \subset L(P_G)$ con gruppo strutturale abeliano $G^{(1)} \subset GL(\mathfrak{G} \oplus V)$ dato da

$$G^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in GL(\mathfrak{G} \oplus V) : \exists f_h \in \ker \partial \subset \text{Hom}(V, \mathfrak{G}) \text{ tale che}$$

$$h|_{\mathfrak{G}} = Id, \ h(v) = v + f_h(v) \ \forall v \in V\} . \quad (2.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Per la (2.4), si osservi che se $\sigma : U \rightarrow Z$ è una sezione locale di Z , l'applicazione

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \subset Z \rightarrow \partial(\text{Hom}(V, \mathfrak{G}))$$

$$\varphi(\sigma(p) \cdot h) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_2(c_{H_{\sigma(p) \cdot h}}) = \partial f_h, \quad h \in G^{(1)}$$

(qui π_2 è la proiezione sul secondo sottospazio nella decomposizione $\text{Hom}(\Lambda^2(V), V)$) è ovunque di rango massimo. Perciò, per il teorema del Dini, è possibile determinare una sezione $\sigma' : U' \subset U \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset Z$ tale che $\varphi \circ \sigma'(q) = 0$, per tutti i punti $q \in U'$. Da questo fatto e dalle precedenti osservazioni, segue che le ipotesi 1), 2) 3) e 4) del Lemma 2.1 sono verificate. $\square$

L'importanza del fibrato $P_G^{(1)}$ è manifestata dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.4. *Un diffeomorfismo ϕ di P_G appartiene a $\text{Aut}(P_G, P_G^{(1)})$ se e solo se $\phi = \hat{f}$, per qualche $f \in \text{Aut}(M, P_G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \text{Aut}(M, P_G)$, il sollevato $\hat{f}$ trasforma Z in sè; se $l \in P_G^{(1)}$ (ovvero se $c_{H_l} \in C$), dal fatto che $\hat{f}$ conserva la forma ϑ , si ha che

$$c_{H_{\hat{f}(l)}} = c_{H_l} \in C$$

e quindi $\hat{f}(l) \in P_G^{(1)}$. Perciò $\hat{f}(P_G^{(1)}) \subseteq P_G^{(1)}$; esso è inoltre un automorfismo di $P_G^{(1)}$, in quanto qualunque sollevato $\hat{f}$ commuta con l'azione di $G^{(1)}$.

Il viceversa è lasciato per esercizio; si noti che per provare che ϕ è il sollevato di un diffeomorfismo $f \in \text{Aut}(M, P_G)$, basta mostrare che $\phi(P_G^{(1)}) \subset Z$. $\square$

DEFINIZIONE 2.5. Per ogni sottogruppo di Lie $G \subseteq GL(V)$, il gruppo abeliano $G^{(1)} \subset GL(\mathfrak{G} \oplus V)$ definito dalla (2.9) è detto *primo prolungamento* di G . L'algebra di Lie $\mathfrak{G}^{(1)}$ di $G^{(1)}$ è detta *primo prolungamento* di $\mathfrak{G}$.

Il sottogruppo $G^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} (G^{(1)})^{(1)} \subset GL(\mathfrak{G}^{(1)} \oplus \mathfrak{G} \oplus V)$ è detto *secondo prolungamento* di G ed, in generale il gruppo $G^{(n)} = (G^{(n-1)})^{(1)}$ è detto *prolungamento ennesimo* del gruppo G (analoghe definizioni valgono per le corrispondenti algebre di Lie).

Un sottogruppo $G \subseteq GL(V)$ è detto *di tipo finito* se esiste un intero n tale che l'ennesimo prolungamento $G^{(n)}$ coincide con il gruppo banale $\{e\}$. L'ordine di un sottogruppo di tipo finito è il primo intero per cui ciò si verifichi.

Analogamente, una riduzione $P_G^{(1)} \subset L(P_G)$ (in generale dipendente dalla scelta del complemento C) è detta *primo prolungamento* della G -struttura P_G ; in generale, una riduzione $P_G^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (P_G^{(n-1)})^{(1)} \subset L(P_G^{(n)})$ è detta *prolungamento ennesimo* della G -struttura P_G .

Dalle definizioni e dalla natura ricorsiva della costruzione, per ogni intero k , ogni diffeomorfismo $f \in \text{Aut}(M, P_G)$ ammette uno ed un solo diffeomorfismo sollevato $f^{(k)} \in L^{(n)}(M) = L(L(\dots L(M)\dots))$. Dalla Proposizione 2.4 segue poi immediatamente il seguente corollario.

COROLLARIO 2.6. *Un diffeomorfismo ϕ di $P_G^{(k-1)}$ appartiene a $\text{Aut}(P_G^{(k-1)}, P_G^{(k)})$ se e solo $\phi = f^{(k)}$ e cioè è il diffeomorfismo sollevato k -esimo di un elemento f di $\text{Aut}(M, P_G)$.*

È veramente importante osservare che per il Corollario 2.6, se $G \subset GL(V)$ è un gruppo di tipo finito di ordine k , un qualunque prolungamento $P_G^{(k-1)}$ (il quale però non è unico, bensì dipende dalla scelta degli spazi complementari ai vari $\partial \text{Hom}(V, \mathfrak{G}^{(i)})$) ammette una connessione canonica: infatti la $\{e\}$ -struttura $P_G^{(k)}$ su $P_G^{(k-1)}$ verifica le condizioni a), b) e c) del Lemma 1.3. Per di più, per il Corollario 2.6, la corrispondenza

$$f \mapsto f^{(k)}$$

è un isomorfismo fra $\text{Aut}(M, P_G)$ ed il gruppo di automorfismi della $\{e\}$ -struttura $P_G^{(k)}$ su $P_G^{(k-1)}$.

§3. Prolungamenti dei sottogruppi $G \subseteq GL(V)$ e le algebre corrispondenti.

Come abbiamo già detto, se $G \subseteq GL(V)$ è un sottogruppo di Lie, il suo primo prolungamento $G^{(1)}$ è definito come

$$G^{(1)} = \{h \in GL(\mathfrak{G} \oplus V) : \exists f_h \in \ker \partial \text{ tale che} \\ h|_{\mathfrak{G}} = Id, \quad h|_V = Id + f_h\} \quad (3.1)$$

dove le applicazioni $f_h \in \ker \partial$ sono quelle della forma

$$f_h \in Hom(V, \mathfrak{G}) \\ f_h(v)w = f_h(w)v, \quad v, w \in V. \quad (3.2)$$

Si ha pertanto che l'algebra di Lie di $G^{(1)}$ è data da

$$\mathfrak{G}^{(1)} = \{H \in End(\mathfrak{G} \oplus V) : \exists f \in \ker \partial \quad H|_{\mathfrak{G}} = 0, \quad H|_V = f \quad f \in \ker \partial\} \cong \\ \cong \{f \in Hom(V, \mathfrak{G}) : f(v)w = f(w)v, \quad v, w \in V\}.$$

Si ha allora che $G^{(1)}$ è un gruppo vettoriale isomorfo alla sua algebra. La stessa proprietà vale per qualunque altro prolungamento $G^{(n)}$. Infatti, per definizione,

$$\mathfrak{G}^{(n)} = \{H \in End(\mathfrak{G}^{(n-1)} \oplus \mathfrak{G}^{(n-2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G} \oplus V) : \exists T \in \ker \partial^{(n)} \text{ tale che} \\ H|_{\mathfrak{G}^{(n-1)}} = 0, \quad H|_{\mathfrak{G}^{(n-1)} \oplus \mathfrak{G}^{(n-2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G} \oplus V} = T\}$$

dove

$$\ker \partial^{(n)} = \{T \in Hom(V \oplus \mathfrak{G} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}^{(n-2)}, \mathfrak{G}^{(n-1)}) : \\ T(x)y = T(y)x \quad \forall x, y \in V \oplus \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}^{(n-2)}\}.$$

Quindi, $\mathfrak{G}^{(n)} \cong \ker \partial^{(n)}$ ed è semplice verificare che $G^{(n)} \cong \mathfrak{G}^{(n)}$.

Per comodità, identificheremo, in tutto quel che segue, $\mathfrak{G}^{(n)}$ con il corrispondente insieme di applicazioni lineari $\ker \partial^{(n)}$.

Vogliamo ora caratterizzare la struttura di tutte le algebre $\mathfrak{G}^{(n)}$. Consideriamo, come esempio, $n = 2$. Se $T \in \mathfrak{G}^{(2)}$, si ha che per ogni $A, B \in \mathfrak{G}$ e per ogni $v \in V$, abbiamo

$$T(A, v)(B, 0) = T(B, 0)(A, v) = 0$$

e che quindi $\mathfrak{G}^{(2)}$ annichila $\mathfrak{G} \oplus \{0\}$; inoltre dati $v, w \in V$, abbiamo che $T(0, v) \in \mathfrak{G}^{(1)}$ e $T(0, v)(0, w) = T(0, w)(0, v) \in \mathfrak{G}$. Ne segue che possiamo identificare T con un'applicazione

$$T : V \otimes V \rightarrow \mathfrak{G},$$

simmetrica, tale che per ogni per ogni $v \in V$ fissato, l'applicazione $w \mapsto T(v, w)$ è un elemento di $\mathfrak{G}^{(1)}$. D'altra parte, da quanto già osservato, gli elementi di $\mathfrak{G}^{(1)}$ sono applicazioni S di $Hom(V \otimes V, V)$ tali che $S(v, w) = S(w, v)$, per ogni coppia

di vettori e con $S(v, *)$ elemento di $\mathfrak{G}$. Pertanto, $\mathfrak{G}^{(2)}$ può essere identificato con lo spazio di tutte le applicazioni simmetriche

$$T : V \otimes V \otimes V \rightarrow V$$

tali che, per ogni scelta di vettori $v_1, v_2 \in V$, l'applicazione

$$v \mapsto T(v, v_1, v_2)$$

è un elemento di $\mathfrak{G}$.

Analogamente, lasciamo al lettore la verifica che l'algebra $\mathfrak{G}^{(k)}$ può essere identificata con il sottospazio degli elementi $T \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ tali che, per ogni scelta di k vettori $v_1, \dots, v_k \in V$, l'applicazione

$$w \mapsto T(w, v_1, \dots, v_k)$$

è un elemento di $\mathfrak{G}$.

Vediamo ora alcuni esempi:

ESEMPIO 3.1. Dato un prodotto euclideo $\langle, \rangle$ su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, consideriamo il gruppo $O(V, \langle, \rangle)$ delle isometrie di $(V, \langle, \rangle)$. Come osservato nell'Esempio 1.4, si tratta del gruppo strutturale di un fibrato di riferimenti ortonormali $O_g(M)$ associato ad una varietà Riemanniana (M, g) con $\dim M = \dim V$.

Calcoliamo ora l'algebra $o(V, \langle, \rangle)^{(1)}$, provando che questa si riduce a $\{0\}$. Sia $f \in o(V)^{(1)}$. Abbiamo che, per $v, w, z \in V$,

$$\begin{aligned} \langle f(v)w, z \rangle &= \langle f(w)v, z \rangle = - \langle v, f(w)z \rangle = \\ &= - \langle v, f(z)w \rangle = \langle f(z)v, w \rangle =, \\ &= \langle f(v)z, w \rangle = - \langle f(v)w, z \rangle \end{aligned}$$

da cui segue che $f = 0$ e che $o(V, \langle, \rangle)^{(1)} \cong \ker \partial = \{0\}$.

Questo ha importanti conseguenze per i fibrati di riferimenti ortonormali. Si osservi che

$$\dim \operatorname{Hom}(\Lambda^2(V), V) = \frac{n^2(n-1)}{2} = \dim \operatorname{Hom}(V, o(V)).$$

Questo fatto, unitamente alla proprietà che l'applicazione ∂ ha nucleo banale, implica che

$$\partial(\operatorname{Hom}(V, o(V))) = \operatorname{Hom}(\Lambda^2(V), V)$$

e che esiste un'unica possibile scelta per un sottospazio $C \subset \operatorname{Hom}(\Lambda^2(V), V)$ complementare a $\partial(\operatorname{Hom}(V, o(V)))$, ovvero il sottospazio banale $\{0\}$.

Se (M, g) è una varietà Riemanniana, la proprietà precedente corrisponde alla seguente proprietà geometrica: ad ogni punto $u \in O_g(M)$, esiste sempre un sottospazio H tale che $c_H = 0$ (questo è affermato dalla Proposizione 2.3) e tale

sottospazio è unico (infatti l'insieme di tali sottospazi è la fibra di $O_g^{(1)}(M)$ che deve essere diffeomorfa al gruppo strutturale $O^{(1)}(V, <, >) = \{e\}$).

Questa proprietà è anche interpretabile affermando che su $O_g(M)$ esiste una connessione (detta *connessione di Levi Civita*), determinata in ogni punto $u \in O_g(M)$ tramite il sottospazio orizzontale H descritto sopra; poiché per costruzione $c_H = 0$, abbiamo che $d\theta|_{H \times H} = 0$, ovvero la connessione così definita si dice avere *torsione nulla* (cfr. [KoNo], vol. I). Per di più, questa connessione è sempre *univocamente determinabile* (non c'è alcuna arbitrarietà nella costruzione!!) ed è canonica, nel senso cioè che è invariante per ogni isometria di (M, g) ed è trasformata nella corrispondente connessione di Levi Civita da ogni isometria $f: M \rightarrow N$, fra (M, g) ed un'altra varietà Riemanniana (N, h) .

ESEMPIO 3.2. Esaminiamo ora l'algebra $co(V, <, >)$ delle trasformazioni conformi per un prodotto euclideo $<, >$ su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Per ogni $A \in co(V, <, >)$, abbiamo che, per ogni $v, w \in V$

$$< Av, w > + < Aw, v > = \lambda < v, w > ,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sia $T \in co(V)^{(1)}$: poichè $T(u) \in co(V)$ per ogni $u \in V$, abbiamo che esiste un $\tau_u \in \mathbb{R}$ tale che

$$< T(u)v, w > + < T(u)w, v > = \tau_u < v, w > \quad (3.3)$$

per ogni $v, w \in V$. È chiaro che l'applicazione $u \mapsto \tau_u$ è un elemento di V^* . Se ora nella (3.3) scambiamo u e v e, rispettivamente, u e w , otteniamo

$$< T(v)u, w > + < T(v)w, u > = \tau_v < u, w > , \quad (3.4)$$

$$< T(w)v, u > + < T(w)u, v > = \tau_w < v, u > . \quad (3.5)$$

Considerando la somma termine a termine delle (3.3), (3.4) e l'opposta di (3.5), otteniamo

$$2 < T(u)v, w > = \tau_u < v, w > + \tau_v < u, w > - \tau_w < u, v > \quad (3.6)$$

il che mostra che l'applicazione

$$T \mapsto \tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< T(*)v, v >}{< v, v >} \quad \text{per qualche } v \neq 0$$

è invertibile ed è quindi un isomorfismo tra $co(V)^{(1)}$ e V^* .

Esaminiamo ora $co(V)^{(2)}$ e scegliamo T in tale algebra. Si può interpretare T come un'applicazione simmetrica $T: \bigotimes^3 V \rightarrow V$ tale che $T(*, *, v) \in co(V)^{(1)}$ per ogni $v \in V$. Dalla (3.6) si ha che

$$2 < T(x, u, v), y > = \alpha_{uv} < x, y > + \alpha_{xv} < u, y > - \alpha_{yv} < x, u > \quad (3.7)$$

per ogni $x, y, u, v \in V$, dove α_{uv} dipende solo da $T(*, u, v)$. Chiaramente α_{uv} è bilineare e simmetrica in u, v . Poichè inoltre $T(x, u, v)$ è simmetrica in x, v , così è anche il membro destro della (3.7), e quindi

$$\alpha_{uv} \langle x, y \rangle - \alpha_{yv} \langle u, x \rangle - \alpha_{ux} \langle v, y \rangle + \alpha_{yx} \langle u, v \rangle = 0. \quad (3.8)$$

Poichè $\langle, \rangle$ è non degenera, possiamo scegliere un endomorfismo autoaggiunto A , in modo che $\langle Au, v \rangle = \alpha_{uv}$ e possiamo riscrivere la (3.8) come

$$\alpha_{uv}x - \alpha_{ux}v - \langle x, u \rangle Av + \langle v, u \rangle Ax = 0.$$

Prendendo le tracce di entrambe i lati, otteniamo

$$(n-2)\alpha_{uv} + \langle v, u \rangle \text{Tr}(A) = 0$$

ovvero

$$(n-2)A = -\text{Tr}(A)Id$$

e, riprendendo le tracce,

$$(n-2)\text{Tr}(A) = -n\text{Tr}(A).$$

Quindi se $n \geq 3$, abbiamo che $\text{Tr}(A) = 0$ e $A = 0$, ovvero $\alpha = 0$ e $T = 0$. In altre parole, se $n \geq 3$, il prolungamento $co(V, \langle, \rangle)^{(2)} = \{0\}$. Questo dimostra che tutte le strutture conformi su varietà di dimensione $n \geq 3$, sono strutture di tipo finito di ordine 2.

Per quanto riguarda l'algebra $co(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$, si noti che questa è isomorfa a $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$co^{(k)}(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle) \cong S^{k+1}(\mathbb{C}^*) \otimes \mathbb{C}$$

Pertanto $co(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$ è un esempio di algebra di tipo infinito.

§4. $\{e\}$ -strutture e loro automorfismi: il Teorema di Kobayashi.

Nei paragrafi precedenti, si è ampiamente sottolineato l'importanza delle $\{e\}$ -strutture per quanto riguarda gli automorfismi delle G -strutture di ordine finito. Dare una $\{e\}$ -struttura su una varietà M è equivalente a dare un riferimento globale $\{X_1, \dots, X_n\}$ costituito da n ($=$ dimensione del gruppo) campi vettoriali globalmente definiti e linearmente indipendenti in ogni punto. In tal caso si dice che M ammette un *parallelismo assoluto* oppure che M è *parallelizzabile*. Esempi immediati di varietà parallelizzabili sono tutti i gruppi di Lie. In realtà la condizione di parallelizzabilità implica forti restrizioni sulla topologia della varietà. Ad esempio, per le sfere S^n vale il seguente risultato, dovuto ad Adams:

TEOREMA 4.1. *La sfera S^n è parallelizzabile se e solo se $n = 1, 3, 7$.*

Per la dimostrazione di questo risultato, rimandiamo il lettore al testo di D. Husemoller ([Hus]).

OSSERVAZIONE 4.2. In realtà le sfere S^1 e S^3 sono parallelizzabili in quanto possono essere dotate di una struttura di gruppo di Lie, e cioè: S^1 è diffeomorfo a $SU(1)$, mentre S^3 è diffeomorfo a $SU(2)$. La parallelizzabilità della sfera S^7 deriva invece dalla struttura di $\mathbb{R}^8$ quale algebra di Cayley e non da qualche diffeomorfismo con un gruppo di Lie. Infatti vale il seguente risultato: *la sfera S^7 non ammette alcuna struttura di gruppo di Lie*. Infatti, essendo S^7 compatta, se fosse dotata di una qualche struttura di gruppo di Lie, essa sarebbe isomorfa al prodotto diretto di un gruppo di Lie G semisemplice e di un toro T^k ; poichè però la sfera è semplicemente connessa, S^7 risulterebbe un gruppo compatto semisemplice. La conclusione si ottiene ricordando la seguente proprietà dei gruppi semisemplici compatti.

LEMMA 4.3. *Se G è un gruppo semisemplice compatto, allora il terzo numero di Betti $b_3(G)$ è non nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con β la forma di Cartan-Killing sull'algebra di Lie $\mathfrak{G}$ di G . Tale forma è invariante rispetto alla rappresentazione aggiunta e, poichè G è semisemplice, è non degenere. Ne risulta che, se $X, Y, Z \in T_g G$, l'applicazione

$$\psi(X, Y, Z) = \beta(L_{g^{-1}*}(X), [L_{g^{-1}*}(Y), L_{g^{-1}*}(Z)])$$

definisce una 3-forma non nulla su G . Inoltre, se fissiamo una metrica bi-invariante su G e D è la connessione di Levi-Civita corrispondente, abbiamo che

$$2D_X Y = ad(X)(Y)$$

e la forma ψ risulta parallela: ne segue che ψ è una forma armonica e, per il teorema di Hodge, definisce un elemento non nullo in $H^3(G, \mathbb{R})$. $\square$

Si può altresì dimostrare che i primi due numeri di Betti di un gruppo compatto semisemplice sono nulli (cfr. [Gol]).

Sia allora M una varietà dotata di un parallelismo assoluto $\{X_1, \dots, X_n\}$ e indichiamo con V lo spazio vettoriale generato su $\mathbb{R}$ dai campi $X_1, \dots, X_n$. Iniziamo con il richiamare alcuni risultati di carattere generale sui flussi di campi in V .

LEMMA 4.4. *Per ogni punto $m \in M$ esiste un intorno aperto U_m di m in M ed un intorno W di $0 \in V$ tali che il flusso $\Phi_t^X(q)$ esista per ogni $t \in [-1, 1]$, $q \in U_m$ e $X \in W$. Inoltre l'applicazione*

$$\exp : W \times U_m \rightarrow M$$

$$\exp(X, q) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1^X(q)$$

è differenziabile.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x^1, \dots, x^n$ delle coordinate locali attorno ad m e si indichi ciascun campo vettoriale X_i come

$$X_i = \sum_{\alpha} X_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad .$$

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie e le condizioni iniziali che definiscono il flusso di un vettore $X = \sum_i v^i X_i$ sono

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \sum_j v^j X_j^i(x^1, \dots, x^n) \\ x^i(0) = a^i \end{cases}$$

Si osservi che sia i coefficienti del sistema che le condizioni iniziali dipendono in maniera $\mathcal{C}^{\infty}$ dai parametri reali v^j e dai valori a^i , $i = 1, \dots, n$. Quindi, per un classico teorema sulle equazioni differenziali (vedi ad es. Dieudonné' [D]) esistono intorni W' , W'' di $0 \in \mathbb{R}^n$, un reale positivo $\epsilon > 0$ ed n -funzioni $\mathcal{C}^{\infty}$ $\phi^i : (-\epsilon, \epsilon) \times W' \times W'' \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) tali che le funzioni

$$x^i(t) = \phi^i(t, v, a)$$

soddisfano al sistema corrispondente alla n -pla di coefficienti, $v = (v^1, \dots, v^n)$ ed alle condizioni iniziali $a = (a^1, \dots, a^n)$.

Così, se poniamo

$$W = \{ X \in V : X = \sum_i v^i X_i \text{ tali che } (\frac{\epsilon}{2}v^1, \dots, \frac{\epsilon}{2}v^n) \in W' \} \quad ,$$

$$U_m = \{ p \in M : p \cong (x_1, \dots, x_n) \in W'' \} \quad ,$$

allora per ogni $X \in W$, $q \in U_m$ e $t \in [-1, 1]$ il flusso Φ_t^X è definito, l'applicazione $\exp_m(X) = \Phi_1^X(m)$ è $\mathcal{C}^{\infty}$ ed inoltre, il differenziale di $\exp_m$ nel punto $O \in V$ risulta essere l'identità. Ne segue che possiamo eventualmente restringere l'intorno W di $0 \in V$ in modo che $\exp_m$ sia un diffeomorfismo di W su un intorno di m . $\square$

Si consideri ora il gruppo $G = \text{Aut}(\{X_i\})$ degli automorfismi della $\{e\}$ -struttura

$$G = \{ f : M \rightarrow M; \quad f_* X_i = X_i \quad i = 1, \dots, n \}.$$

Il seguente teorema, dovuto a S. Kobayashi (vedi [Kob1]), è di basilare importanza.

TEOREMA 4.5. *Il gruppo $G = \text{Aut}(\{X_i\})$ è un gruppo di Lie di trasformazioni di M ed ha dimensione*

$$\dim G \leq \dim M .$$

Più precisamente, per ogni punto $m \in M$, l'applicazione

$$G \ni g \mapsto g(m) \in M$$

è iniettiva e l'immagine è una sottovarietà regolare chiusa di M . La struttura di sottovarietà dell'orbita $G(m)$ indotta da M è compatibile con la struttura di gruppo di Lie di G .

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo subito con il seguente Lemma che fornisce un risultato interessante di per sè.

LEMMA 4.6. *Sia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di G e supponiamo esista un punto $p \in M$ tale che la successione in M data da $\{g_n(p)\}$ sia convergente. Allora $\{g_n\}$ converge uniformemente sui compatti ad un elemento $g \in G$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con C l'insieme dei punti $q \in M$ per i quali la successione $\{g_n(q)\}$ risulta convergente. Per ipotesi C è non vuoto; proveremo che C è aperto e chiuso in M e che di conseguenza coincide con M , essendo M connessa.

Sia $x \in C$ e poniamo $y = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$. Per il Lemma 4.4, possiamo allora scegliere un intorno W di $0 \in V$ di modo tale che valgano le seguenti condizioni:

- 1) $\exp_x$ sia un diffeomorfismo di W su un intorno aperto U_x di x ;
- 2) esiste un intorno aperto U_y di y tale che sia definita (e per di più C^∞) l'applicazione $\exp : W \times U_y \rightarrow M$.

Fatto ciò, osserviamo che, dato un punto $z \in U_x$, esiste un unico elemento $v \in W$ tale che $z = \exp_x(v)$ e, poichè $g_n(x)$ converge a y , la successione $\{g_n(x)\}$ è contenuta definitivamente in U_y ; poichè inoltre ciascun g_n conserva il parallelismo assoluto, risulta

$$g_n(z) = g_n(\exp_x(v)) = \exp_{g_n(x)}(v),$$

da cui segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = \exp_y(v)$. Ciò prova che $C \supset U_x$ ovvero che l'insieme C è aperto.

Per provare che C è chiuso, osserviamo che su M è definita una metrica Riemanniana $\mathbf{g}$ (che è anche G -invariante), ottenuta ponendo in ogni punto m

$$\mathbf{g}(X_i|_m, X_j|_m) = \delta_{ij}.$$

Indichiamo con d la distanza indotta da $\mathbf{g}$ su M . Si consideri ora una successione di punti $\{x_n\}$ di C convergente ad un punto x e dimostriamo che la successione $\{g_n(x)\}$ è convergente.

Prima di tutto proviamo che è di Cauchy. Fissato $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che risulti $d(x, x_N) < \epsilon/3$; poichè la successione $\{g_n(x_N)\}$ è convergente, esiste un intero Q tale che per ogni intero $k, l \geq Q$ risulta $d(g_k(x_N), g_l(x_N)) < \epsilon/3$; risulta allora per ogni $k, l \geq Q$

$$\begin{aligned} d(g_k(x), g_l(x)) &\leq d(g_k(x), g_k(x_N)) + d(g_k(x_N), g_l(x_N)) \\ &\quad + d(g_l(x_N), g_l(x)) < 2d(x, x_N) + \epsilon/3 < \epsilon. \end{aligned}$$

A questo punto però non è lecito concludere che la successione $\{g_n(x_N)\}$ è convergente, in quanto non è detto che la distanza d sia completa. Basta tuttavia dimostrare che la successione $\{g_n(x)\}$ è contenuta definitivamente in un compatto di M . Allora, scegliamo $\epsilon > 0$ di modo che la palla $B(x, \epsilon) = \{z \in M; d(z, x) < \epsilon\}$ abbia chiusura compatta. Poichè la successione $\{g_n(x)\}$ è di Cauchy, possiamo trovare $k \in \mathbb{N}$ con $d(g_n(x), g_N(x)) < \epsilon$ per ogni $n > N$; ne segue che per $n > N$ la successione $\{g_n(x)\}$ è contenuta nella palla $B(g_N(x), \epsilon) = g_N(B(x, \epsilon))$, la quale ha chiusura compatta.

Essendo $C = M$, possiamo ora considerare una applicazione g da M in M definita come

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

per ogni $x \in M$. Concluderemo la dimostrazione del Lemma, una volta dimostrato che g è in realtà un diffeomorfismo appartenente a G e che la successione g_n converge a g sui compatti.

Fissato $x \in M$ e fissati tre intorno, W di $0 \in V$, U_x di x e U_y di $y = g(x)$, tali che le due applicazioni $\exp_x$ e $\exp_y$ siano diffeomorfismi di W su U_x e U_y rispettivamente, abbiamo, per definizione di g , che

$$g(\exp_x(v)) = \exp_y(v),$$

per ogni $v \in W$. Questo implica che g è di classe C^∞ , è un diffeomorfismo locale e che preserva il parallelismo assoluto. Resta alla fine da dimostrare che g è un diffeomorfismo globale, ovvero che è invertibile.

Poniamo $q = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(p)$ e osserviamo che la successione $\{g_n^{-1}(q)\}$ converge al punto p . Per gli stessi argomenti usati finora, esiste un'altra applicazione h , definita come

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(x) \quad ,$$

che è anch'essa di classe C^∞ e che preserva il parallelismo assoluto. Dalla stessa definizione, segue che $g \circ h = h \circ g = Id$, provando che g è un diffeomorfismo appartenente a G .

Da ultimo, è necessario controllare che la convergenza puntuale della successione $\{g_n\}$ al diffeomorfismo g sia in realtà uniforme sui compatti. Questo fatto è dimostrato dal seguente ben noto Lemma sulle successioni di isometrie. $\square$

LEMMA 4.7. *Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà Riemanniana, $g \in I(M, \mathbf{g})$ una isometria di M e $\{g_n\}$ una successione di isometrie che converge a g puntualmente. Allora la successione $\{g_n\}$ converge uniformemente a g su qualunque compatto $K \subseteq M$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia dato un numero reale positivo δ e si scelga per ogni $k \in K$ un intero N_k tale che

$$n > N_k \quad \Rightarrow \quad d(g_n(k), g(k)) < \frac{\delta}{4}$$

Si consideri poi la palla $B_k = \{m \in M : d(m, k) < \frac{\delta}{4}\}$ e si osservi che per ogni $m \in B_k$ ed $n > N_k$

$$d(g_n(m), g(m)) \leq d(g_n(m), g_n(k)) + d(g_n(k), g(k)) + d(g(k), g(m)) <$$

$$< 2d(m, k) + \frac{\delta}{4} < \delta$$

Poichè K può essere ricoperto da un numero finito di palle B_k (chiamiamole B_{k_j} , $j = 1, \dots, s$), avremo che se $n > \max_{j=1, \dots, s} N_{k_j}$ allora,

$$d(g_n(m), g(m)) < \delta$$

per tutti i punti $m \in K$ e quindi $\{g_n\}$ converge uniformemente su K . $\square$

Procediamo ora con il seguente

LEMMA 4.8. *Per ogni $g \in G$, $g(p) = p$ se e soltanto se $g = id_M$ e quindi, l'applicazione $g \mapsto g(p)$ è iniettiva. Inoltre, ogni orbita di G è chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $g \in G$ e sia F l'insieme dei punti fissi di g . Chiaramente F è chiuso in M . Consideriamo un punto $p \in F$ ed un intorno W di $0 \in V$ tale che $\exp_p$ sia un diffeomorfismo di W su un intorno U di p : per ogni $X \in W$ abbiamo

$$g(\exp_p(X)) = \exp_{g(p)}(X) = \exp_p(X),$$

ovvero l'intorno U di p è tutto costituito di punti fissi per g ; ciò prova che F è aperto oltre che chiuso e quindi $F = M$. Poichè si suppone che G agisca effettivamente, g è la trasformazione identica.

Il fatto che ogni orbita sia chiusa deriva immediatamente dal Lemma 4.6. $\square$

Continuiamo ora la dimostrazione del teorema. Indichiamo con $\mathfrak{L}$ l'algebra di Lie di tutti i campi di vettori Y tali che

$$\mathcal{L}_Y X_i = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Abbiamo che

LEMMA 4.9. *Per ogni punto $m \in M$ e $Y \in \mathfrak{L}$, $Y|_m = 0$ se e soltanto se $Y \equiv 0$. In particolare, $\mathfrak{L}$ è un'algebra di Lie finito dimensionale con*

$$\dim \mathfrak{L} \leq \dim M \quad .$$

DIMOSTRAZIONE. Se $Y|_m = 0$, allora il gruppo locale ad un parametro dato dal flusso Φ_t^Y , preservando il parallelismo assoluto, fissa ogni punto di un intorno opportuno di m (si usi la stessa argomentazione dei lemmi precedenti). L'insieme dei punti ove si annulla Y risulta pertanto aperto e chiuso, quindi coincide con M . $\square$

FINE DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.5. Sia ora S l'insieme dei campi di vettori completi i cui flussi sono diffeomorfismi appartenenti a G : è chiaro che $S \subset \mathfrak{L}$ e quindi S genera un'algebra di dimensione finita, che risulta essere minore o uguale a $\dim M$, grazie al Lemma 4.9. Per il Teorema I.4.7, il gruppo G ha una struttura di gruppo di Lie con azione C^∞ su M , $\dim G = \dim \mathfrak{L} \leq \dim M$ ed ogni orbita risulta una sottovarietà chiusa di M per il Lemma 4.8. $\square$

Concludiamo con i seguenti due corollari di diretta dimostrazione.

COROLLARIO 4.10. *Sia G un gruppo di Lie e sia $\{X_1, \dots, X_n\}$ la $\{e\}$ -struttura su G definita da n campi vettoriali invarianti a sinistra. Il gruppo $G' = \text{Aut}(\{X_i\})$ è isomorfo a G , tramite l'applicazione*

$$\begin{aligned}\varphi: G' &\rightarrow G \\ \varphi(g) &= g(e) \quad .\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.

COROLLARIO 4.11. *Sia $G \subset GL(V)$ un gruppo di ordine finito k e sia*

$$n_G = \sum_{i=0}^k \dim G^{(i)} .$$

Il gruppo degli automorfismi $\text{Aut}(M, P_G)$ di una G -struttura P_G su M è un gruppo di Lie nella topologia compatta aperta e di dimensione minore o uguale a $\dim M + n_G$.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.

Come caso particolare del Corollario 4.11, si ottiene il classico Teorema di Myers-Steenrod sul gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana. In tal caso, il gruppo G delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) è un gruppo di Lie di dimensione non superiore a $\frac{1}{2}n(n+1)$, dove $n = \dim M$. Per ulteriori informazioni sulle possibili dimensioni del gruppo G , si veda [Kob1].

§5. $\{e\}$ -strutture e le orbite degli automorfismi locali: il Teorema di Cartan-Sternberg.

Il teorema di Kobayashi afferma che il gruppo di automorfismi globali di una $\{e\}$ -struttura su M è un gruppo di Lie di dimensione inferiore o uguale a M . Vogliamo adesso determinare dei metodi di calcolo per determinare esplicitamente le orbite di questi automorfismi ed, in particolare, la loro dimensione (che coincide con la dimensione stessa del gruppo), basandosi solo sulle proprietà intrinseche della $\{e\}$ -struttura considerata. Dai risultati dei paragrafi §II.1 - §II.3, risulta chiaro che qualunque risultato in questa direzione comporta risultati di uguale importanza per i gruppi di automorfismi di strutture di tipo finito.

In ciò che segue supponiamo fissato sulla varietà M un parallelismo assoluto $\{X_1, \dots, X_n\}$. Sappiamo che questo è lo stesso che fissare una sezione globale

$$\gamma: M \rightarrow L(M)$$

e che i campi vettoriali $\{X_1, \dots, X_n\}$ non sono altro che determinati dai vettori

$$X_i|_p = \gamma_p(e_i) \quad \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base per } V$$

Si definisce *torsione della $\{e\}$ -struttura γ* la seguente applicazione

$$c_\gamma: M \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 V, V)$$

$$c_\gamma(v_1 \wedge v_2)|_p = \gamma^{-1}([\gamma(v_1), \gamma(v_2)]|_p)$$

Se si considerano le 1-forme $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, date dalle basi duali a quelle determinate dai campi vettoriali $X_i = \gamma(e_i)$, si possono determinare le componenti c_{ij}^k di c_γ rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ come segue:

$$c_\gamma(e_i \wedge e_j) = \sum_k c_{ij}^k e_k = \sum_{k=1}^n \omega^k([X_i, X_j]) e_k \quad (5.1)$$

Le funzioni $c_{ij}^k = \omega^k([X_i, X_j])$ vengono chiamate *funzioni di struttura* di γ . Si osservi che nel caso M sia un gruppo di Lie G e che la $\{e\}$ -struttura sia data dai campi vettoriali invarianti a sinistra, le funzioni di struttura sono costanti e sono esattamente le *costanti di struttura* di G .

La *prima derivata covariante* di c_γ è l'applicazione

$$c_\gamma^1: M \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 V \otimes V, V)$$

$$c_\gamma^1(v_1, v_2; v_3)|_p = -\gamma_p^{-1}([c_\gamma(v_1, v_2), \gamma(v_3)]|_p)$$

ed in generale la derivata covariante s -esima c_γ^s è definita come

$$c_\gamma^s: M \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 V \otimes \bigotimes_{1 \leq i \leq s} V, V)$$

$$c_\gamma^s(v_1, v_2; v_3 \dots, v_{s+1}, v_{s+2}|_p) = -\gamma_p^{-1}([c_\gamma^{s-1}(v_1, v_2; v_3 \dots, v_{s+1}), \gamma(v_{s+2})])$$

Le componenti $c_{jk, m_1 \dots m_n}^i$ della derivata covariante n esima sono determinabili tramite la formula

$$c_{jk, m_1 \dots m_{n-1} m_n}^i = X_{m_n}(c_{jk, m_1 \dots m_{n-1}}^i) \quad (5.2)$$

Per ogni intero α , sia $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ la seguente famiglia di funzioni reali su M

$$\mathcal{F}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \{c_{jk}^i, c_{jk, m_1}^i, c_{jk, m_1 \dots m_\alpha}^i\} \quad (5.3)$$

Se chiamiamo Q_α la cardinalità di $\mathcal{F}^{(\alpha)}$, le funzioni in $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ sono le componenti di una applicazione liscia (che indichiamo anch'essa con $\mathcal{F}^{(\alpha)}$) da M su $\mathbb{R}^{Q_\alpha}$. Un punto $p \in M$ viene detto *punto di regolarità per $\mathcal{F}^{(\alpha)}$* se

$$\text{rango}(\mathcal{F}^{(\alpha)})$$

è costante in un intorno di p .

Ecco due proprietà essenziali dei punti di regolarità.

LEMMA 5.1. *Se p è un punto di regolarità per $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ con $\text{rango}(\mathcal{F}^{(\alpha)}|_p) = r$, allora esiste un sistema di coordinate*

$$x: U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

su un intorno U_p di p tale che tutte le componenti di

$$\mathcal{F}^{(\alpha)} \circ x^{-1}: x(U_p) \rightarrow \mathbb{R}^{Q_\alpha}$$

dipendono solo dalle prime r coordinate $x_1, \dots, x_r$ e queste ultime coincidono con r funzioni della famiglia $\mathcal{F}^{(\alpha)}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $f_1, \dots, f_r$ funzioni della famiglia $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ tali che i differenziali df_i , $i = 1, \dots, r$ siano linearmente indipendenti in p (e quindi in tutto un intorno U_p di p). Si consideri poi un sistema di coordinate su U_p , con le prime r coordinate date da

$$x_1(q) = f_1(q), \dots, x_r(q) = f_r(q) \quad q \in U_p$$

Poichè $\text{rango}(\mathcal{F}_q^{(\alpha)}) = r$ per ogni $q \in U_p$, i differenziali di tutte le componenti $g \circ x^{-1}$ di $\mathcal{F}^{(\alpha)} \circ x^{-1}$ sono combinazioni lineari dei differenziali $df_1 \circ x^{-1} = dx^1, \dots, df_r \circ x^{-1} = dx^r$. Questo implica che $\mathcal{F}^{(\alpha)} \circ x^{-1}$ dipende solo dalle prime r coordinate. $\square$

Un sistema di coordinate che verifica la tesi della Lemma 5.1 viene detto *sistema di coordinate adattato alla famiglia $\mathcal{F}^{(\alpha)}$* .

LEMMA 5.2. Se $p \in M$ è un punto di regolarità per $\mathcal{F}^{(\alpha+1)}$ e se

$$\text{rango}(\mathcal{F}^{(\alpha)})_p = \text{rango}(\mathcal{F}^{(\alpha+1)})_p = r$$

allora p è un punto di regolarità per tutte le famiglie $\mathcal{F}^{(\alpha+s)}$, $s \geq 1$ e

$$g(\mathcal{F}^{(\alpha)})_p = \text{rango}(\mathcal{F}^{(\alpha+s)})_p = r$$

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che

$$0 \leq \text{rango}(\mathcal{F}^{(0)})_p \leq \text{rango}(\mathcal{F}^{(1)})_p \leq \text{rango}(\mathcal{F}^{(2)})_p \leq \dots \leq n$$

e quindi, per la semicontinuità del rango, se p è di regolarità per $\mathcal{F}^{(\alpha+1)}$, lo è anche per $\mathcal{F}^{(\alpha)}$. Prendiamo ora un sistema di coordinate adattato, le cui prime coordinate $x_1, \dots, x_r$ coincidano con r funzioni $f_1, \dots, f_r$ di $\mathcal{F}^{(\alpha)} \subset \mathcal{F}^{(\alpha+1)}$. Si osservi che, per costruzione, per qualunque funzione $g \in \mathcal{F}^{(\alpha)}$, le funzioni $X_j(g)$, $j = 1, \dots, n$ sono elementi di $\mathcal{F}^{(\alpha+1)}$. In particolare, le funzioni $X_j(f_k)$ sono anch'esse in $\mathcal{F}^{(\alpha+1)}$ e quindi funzioni solo delle prime r coordinate del sistema adattato.

Si osservi ora che le funzioni $h \in \mathcal{F}^{(\alpha+2)}$ sono tutte del tipo

$$h = X_j(h') = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(h' \circ x^{-1})}{\partial x^k} X_j(f_k)$$

per qualche $h' \in \mathcal{F}^{(\alpha+1)}$ e $j = 1, \dots, n$. Dal momento che sia le $\frac{\partial(h' \circ x^{-1})}{\partial x^k}$ che le $X_j(f_k)$ dipendono solo dalle prime r coordinate, si conclude che tutte le funzioni di $\mathcal{F}^{(\alpha+2)}$ dipendono solo dalle prime r coordinate e che quindi il rango deve ancora essere r . La dimostrazione del Lemma si conclude applicando induttivamente questo ragionamento. $\square$

Se un punto p verifica le ipotesi del Lemma 5.2, viene detto *punto di regolarità per il parallelismo assoluto* γ . In questo caso, l'ordine del parallelismo γ nel punto p è il più piccolo intero α_o per cui le ipotesi del Lemma 5.2 sono verificate; il *rango del parallelismo nel punto* p è il rango di $\mathcal{F}^{(\alpha_o)}$ in p .

Dimostriamo ora il seguente teorema dimostrato originariamente da E. Cartan nel caso di varietà analitiche reali e poi esteso da Sternberg ([Ste]) al caso C^∞ .

TEOREMA 5.3. (Cartan-Sternberg) Sia $p \in M$ un punto di regolarità per il parallelismo assoluto $X_1, \dots, X_n$ e sia $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate adattato su un intorno U di p . Per ogni r -pla $(c_1, \dots, c_r)$ di numeri reali, indichiamo con $S_{(c_1, \dots, c_r)}$ la sottovarietà di U

$$S_{(c_1, \dots, c_r)} = \{q \in U : x_1(q) = c_1, \dots, x_r(q) = c_r\}$$

Allora, per ogni coppia di punti $q, q' \in U$, esiste una equivalenza locale f del parallelismo assoluto tale che $f(q) = q'$ se e solo se q e q' appartengono ad una stessa

sottovarietà $S_{(c_1, \dots, c_r)}$. Due equivalenze locali f ed f' tali che $f(q) = q'$ devono coincidere in un intorno $V \subset U$ di q .

DIMOSTRAZIONE. Sia f una equivalenza locale, cioè sia

$$f^* \omega^i = \omega^i \quad , \quad f_* X_i = X_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (5.4)$$

Allora per la (5.1) e (5.2), tutte le funzioni $c_{ij, m_1 \dots m_p}^k$ assumono valori uguali sui punti q e $q' = f(q)$. Ciò significa che i valori delle prime r coordinate devono coincidere sia per q e q' . Questo dimostra la necessità della condizione.

Per dimostrare la sufficienza, cercheremo di far vedere che le condizioni indicate garantiscono l'esistenza di una sottovarietà di $U \times U$, che sia il grafico di una equivalenza locale del parallelismo assoluto. Indichiamo con π_1 e π_2 le proiezioni di $U \times U$ sul primo e sul secondo fattore, rispettivamente, ed introduciamo le 1-forme

$$\theta^i = \pi_1^* \omega^i \quad \bar{\theta}^i = \pi_2^* \omega^i$$

e le coordinate

$$y^i = (y^1 = x^1 \circ \pi_1, \dots, y^n = x^n \circ \pi_1, y^{n+1} = x^1 \circ \pi_2, \dots, y^{2n} = x^n \circ \pi_2)$$

Si osservi che il grafico N di una equivalenza locale f è una sottovarietà n -dimensionale di $U \times U$, su cui, per la (5.4),

$$(\theta^i - \bar{\theta}^i)|_N \equiv 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

$$(y^i - y^{i+n})|_N \equiv 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (5.6)$$

D'altra parte, la condizione (5.5) è anche sufficiente affinché una sottovarietà N semplicemente connessa sia il grafico di un diffeomorfismo. Infatti, le 1-forme $\theta^i - \bar{\theta}^i$ sono indipendenti in $U \times U$ e quindi le 1-forme $\theta^i|_N$ sono linearmente indipendenti su N . Per questo motivo, la proiezione π_1 deve essere non singolare su tutti i punti di N e quindi un rivestimento di $\pi_1(N)$; per la semplice connessione, questo implica che $\pi_1|_N$ è un diffeomorfismo fra N e $\pi_1(N)$. Un ragionamento analogo porta a concludere che anche $\pi_2|_N$ è un diffeomorfismo fra N e la sua immagine e che quindi N è il grafico del diffeomorfismo $f = \pi_2 \circ (\pi_1|_N)^{-1}$. Per costruzione di N tale diffeomorfismo deve inoltre essere una equivalenza locale del parallelismo assoluto.

Consideriamo la sottovarietà N' di $U \times U$ definita dalle (5.6): è una varietà di dimensione $2n - r$ e vogliamo fra vedere che le 1-forme $(\theta^i - \bar{\theta}^i)|_{N'}$ soddisfano alla condizione di Frobenius di integrabilità e che le foglie integrali costituiscono delle sottovarietà di dimensione n . In questo modo si dimostra l'esistenza di soluzioni delle (5.5) e (5.6) per ogni punto $(q, q') \in N' \subset U \times U$ ed il teorema è dimostrato.

Riordiniamo le 1-forme ω^i in modo che le forme $\{dx^1, \dots, dx^r, \omega^{r+1}, \dots, \omega^n\}$ siano linearmente indipendenti in un intorno del punto $(q, q') \in N'$. Esprimiamo allora ciascuna forma ω^i come

$$\omega^i = \sum_{j=1}^r a_j^i dx^j + \sum_{j=r+1}^n b_j^i \omega^j \quad .$$

Dal momento che le 1-forme dx^i , $i = 1, \dots, r$ possono essere espresse come

$$dx^i = \sum_{j=1}^n X_j(x^i) \omega^j$$

e che le $X_j(x^i)$ sono funzioni di $\mathcal{F}^{(\alpha)}$, possiamo dire che i coefficienti a_j^i e b_j^i sono funzioni razionali delle $X_j(x^i)$ e quindi delle sole coordinate x^i , $i = 1, \dots, r$. Segue dunque che, se ci restringiamo alla sottovarietà N' , possiamo scrivere sia le 1-forme θ^i che le 1-forme $\bar{\theta}^i$ tramite le stesse funzioni a_j^i e b_j^i , ovvero come

$$\theta^i = \sum_{j=1}^r a_j^i dy^j + \sum_{j=r+1}^n b_j^i \theta^j$$

$$\bar{\theta}^i = \sum_{j=n+1}^{n+r} a_j^i dy^j + \sum_{j=r+1}^n b_j^i \bar{\theta}^j$$

Dal momento che le $dy^i|_{N'}$ sono identicamente nulle abbiamo che

$$(\theta^i - \bar{\theta}^i)|_{N'} = \sum_{j=r+1}^n b_j^i (\theta^j - \bar{\theta}^j)|_{N'} \quad (5.7)$$

Da questo e dalla indipendenza lineare delle $\theta^j - \bar{\theta}^j$ in ogni punto di $U \times U$ segue che esattamente $n - r$ forme fra le $\theta^j - \bar{\theta}^j$ sono linearmente indipendenti su N' e che quindi le foglie integrali del sistema (5.6) devono essere esattamente n dimensionali. Resta infine da controllare che le (5.7) soddisfano alla condizione di Frobenius. Questa comunque è facilmente verificata osservando che

$$\begin{aligned} d(\theta^i - \bar{\theta}^i)|_{N'} &= \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i (\theta^j \wedge \theta^k - \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k)|_N = \\ &= \left[\sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i (\theta^j - \bar{\theta}^j) \wedge \theta^k + \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i \bar{\theta}^j \wedge (\theta^k - \bar{\theta}^k) \right] \Big|_N \equiv 0 \text{ mod } \theta^j - \bar{\theta}^j . \end{aligned}$$

L'unicità del germe dell'equivalenza locale f deriva direttamente dall'unicità della foglia integrale del sistema (5.6) e (5.7). Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Usando le notazioni del Cap.I, indichiamo con $Aut_{loc}(\{X_i\})$ la famiglia delle equivalenze locali del parallelismo assoluto $\{X_i\}$ e chiamiamo *trasformazione infinitesima locale* ogni campo vettoriale locale ξ il cui flusso sia una famiglia ad un parametro di $Aut_{loc}(\{X_i\})$. Abbiamo allora

COROLLARIO 5.4. *Sia $p \in M$ un punto di regolarità per il parallelismo assoluto $X_1, \dots, X_n$ e sia U un intorno di p su cui sia definito un sistema di coordinate adattato. Allora per ogni $q \in U$ ed ogni vettore $v \in T_q M$ esiste un' unica trasformazione infinitesima locale ξ tale che $\xi_q = v$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tale che $\gamma(0) = q$, $\dot{\gamma}(0) = v$ e che $\gamma(t) \in S_{(c_1, \dots, c_r)}$ per ogni $t \in I$. Per il Teorema 5.3, per ogni t esiste una equivalenza locale f_t (definita unicamente in un intorno di q) tale che $f_t(q) = \gamma(t)$. Per t sufficientemente piccoli, possiamo supporre che tutte le f_t siano definite sullo stesso aperto V e possiamo calcolare il campo vettoriale ξ definito su V

$$\xi_y \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{df_t(y)}{dt} \right|_{t=0}$$

Dal momento che tutte le f_t verificano le equazioni

$$f_{t*} X_i = X_i$$

segue direttamente che

$$\mathcal{L}_\xi X_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

e che quindi ξ è una trasformazione locale infinitesima del gruppo degli automorfismi del parallelismo assoluto. Dal Teorema 5.3 si deduce l'unicità del flusso Φ_t^ξ (e quindi l'unicità di ξ) su un intorno $U' \subset U$. Segue dunque, per la semplice connessione di U , che ξ può essere esteso in modo univoco a tutto U . $\square$

COROLLARIO 5.5. *Sia M semplicemente connesso e sia ogni punto di M un punto di regolarità di rango r per un parallelismo assoluto $X_1, \dots, X_n$. Allora ogni trasformazione infinitesima locale ξ di $\text{Aut}_{\text{loc}}(\{X_i\})$ si estende, in modo unico, ad una trasformazione infinitesima globale.*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio.

§6. G -strutture infinitesimalmente omogenee.

Sia P una G struttura su M e sia ω una forma di connessione su P canonica, cioè sicuramente invariante per l'azione degli elementi di $Aut(P, M)$. Sia V lo spazio modello per TM , $\{e_i\}$ una base per V e sia $s: U \rightarrow P$ una qualunque sezione locale di P . s determina banalmente i campi di vettori $X_i|_q = s(q)(e_i)$, che sono linearmente indipendenti in ogni punto. Le 1-forme $\{\pi^i\}$ duali in ogni punto alle basi $\{X_i\}$ hanno differenziali che dipendono dalla 1-forma di connessione ω . Infatti se esprimiamo ω come

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_j^i E_i^j$$

dove le $\{E_i^j\}$ sono gli elementi di $\mathfrak{gl}(V)$, $E_i^j = e^j \otimes (e^i)^*$, dalle proprietà delle connessioni lineari (vedi e.g. [KoNo], vol.I), i differenziali $d\pi^i$ e $d\omega_j^i$ possono essere espressi come

$$\begin{aligned} d\pi^i &= \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \pi^j + \sum_{j,k=1}^n T_{jk}^i \pi^j \wedge \pi^k , \\ d\omega_j^i &= \sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \sum_{k,m=1}^n R_{jkm}^i \pi^k \wedge \pi^m , \end{aligned}$$

dove le T_{jk}^i e R_{jkm}^i sono le componenti della torsione e della curvatura, ovvero dei seguenti due campi tensoriali

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i,j,k=1}^n T_{jk}^i X_i \otimes \pi^j \wedge \pi^k , \\ R &= \sum_{i,j,k,m=1}^n R_{jkm}^i X_i \otimes \pi^j \otimes \pi^k \wedge \pi^m . \end{aligned}$$

Indichiamo ora con DT e DR le derivate covarianti dei tensori T ed R e ricordiamo la formula di derivazione covariante

$$D_{X_i}(S) = X_i(S) - \omega(X_i) \cdot S$$

Per ogni intero s indichiamo anche $D^s T = D(D^{s-1}T)$ e $D^s R = D(D^{s-1}R)$ e siano

$$\mathfrak{H}_p^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathfrak{G} : a \cdot T_p = 0 , \quad a \cdot R_p = 0 \} ,$$

$$\mathfrak{H}_p^s \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathfrak{H}_p^{s-1} : a \cdot D^s T_p = 0 , \quad a \cdot D^s R_p = 0 \} .$$

Infine, indichiamo con $s(p)$ il più piccolo intero tale che per ogni $r \geq 1$

$$\mathfrak{H}_p^{s(p)+r} = \mathfrak{H}_p^{s(p)}$$

$s(p)$ è detto *l'invariante di Singer nel punto p* .

Abbiamo allora la seguente definizione:

DEFINIZIONE 6.1. P è detta *infinitesimamente omogenea* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste un'applicazione lineare $F: T_p M \rightarrow T_q M$ tale che:

- a) per ogni $u \in \pi^{-1}(p) \subset P$, $F \circ u \in \pi^{-1}(q)$;
- b) $F^* D^s T_q = D^s T_p$ per ogni $0 \leq s \leq s(p)$;
- c) $F^* D^s R_q = D^s R_p$ per ogni $0 \leq s \leq s(p)$.

Si osservi che b) e c) implicano che $s(p)$ è costante su tutto M e lo indicheremo con s_o .

TEOREMA 6.2. *Una G -struttura P , dotata di connessione canonica, è localmente omogenea se e solo se è infinitesimamente omogenea.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il parallelismo assoluto γ su P dato dalle 1-forme θ^i e ω_j^i date da

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta^i e_i \quad \omega_j^i = \sum_{i=1}^n \omega_j^i E_i^j$$

ed indichiamo con X_i e E_j^{*i} i campi vettoriali duali alle $\{\theta^i, \omega_j^i\}$.

Dalle (5.1) abbiamo che le funzioni di struttura c_{jk}^i di γ sono

$$\begin{aligned} \theta^k([X_i, X_j]) &= d\theta^k(X_i, X_j) = T_{ij}^k, \\ \theta^k([X_i, E_j^{*m}]) &= \delta_i^m \delta_j^k, \quad \theta^k([E_i^{*r}, E_j^{*m}]) = 0, \\ \omega_m^k([X_i, X_j]) &= d\omega^k(X_i, X_j) = R_{mij}^k, \\ \omega_m^k([X_i, E_j^{*n}]) &= 0, \quad \omega_m^k([E_i^{*r}, E_j^{*n}]) = \delta_i^m \delta_j^k \delta_n^r, \end{aligned}$$

ovvero sono univocamente determinate dai tensori T ed R . Similmente le prime derivate covarianti di queste funzioni di struttura sono

$$X_i(T_{ij}^k) = (D_{\pi_*(X_i)} T)_{ij}^k, \quad X_i(R_{ijm}^k) = (D_{\pi_*(X_i)} R)_{ijm}^k,$$

$$E_i^{*n}(T_{ij}^k) = E_j^n \cdot T_{ij}^k, \quad E_i^{*n}(R_{ijm}^k) = E_j^n \cdot R_{ijm}^k,$$

ed in generale, le derivate covarianti s -esime sono date dalle derivate covarianti $D^s T$ e $D^s R$ e dall'azione degli elementi E_j^n sulle derivate covarianti di ordine inferiore.

In ogni riferimento $u \in P$ con $p = \pi(u)$, il rango della famiglia di funzioni $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ è dato da

$$\text{rango}(d\mathcal{F}^{(\alpha)}) = \dim \mathfrak{G} - \dim \mathfrak{H}_p^{\alpha+1} + \text{rango}(D^{\alpha+1} T_p + D^{\alpha+1} R_p)$$

Dunque, se M è infinitesimamente omogeneo, $\text{rango}(d\mathcal{F}^{(\alpha)})$ è costante su tutto M per ogni $\alpha \leq s_o$ e, per definizione dell'invariante di Singer e per il Lemma 5.2, ogni punto u di P è punto di regolarità di γ e di ordine esattamente pari a s_o . Dunque, per ogni punto $p \in M$, esiste un riferimento $u \in \pi^{-1}(p)$ ed un intorno $U \subset P$ che ammette un sistema di coordinate adattato. Se $c_1, \dots, c_r$ sono i valori delle prime r coordinate di u (e quindi coincidono con opportuni valori determinati dai tensori di

torsione e di curvatura), allora, per le ipotesi, per ogni punto $q \in \pi(U)$, esiste sempre un riferimento $u' \in \pi^{-1}(q)$ che appartiene alla sottovarietà $S_{(c_1, \dots, c_r)}$ indicata nel Teorema 5.3. Di conseguenza, esiste un automorfismo locale $\tilde{f}$ di $Aut(P, \gamma)$ tale che $\tilde{f}(u) = u'$. Per la Proposizione 2.2, $\tilde{f}$ è il sollevato di un elemento $f \in Aut(M, P)$ e questo dimostra che la G struttura P è localmente omogenea.

Il viceversa è di verifica immediata. $\square$

Il Teorema 6.2 ha come diretta conseguenza il seguente importante corollario, dimostrato per la prima volta, nel caso di varietà Riemanniane, da I.M. Singer ([Sin])

COROLLARIO 6.3. *(I. M. Singer) Una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) è localmente omogenea se e solo se è infinitesimalmente omogenea, ovvero se per ogni coppia di punti p, q esiste una isometria F fra $T_p M$ e $T_q M$ tale che $F^* D^s R_q = D^s R_p$ per ogni intero s minore o uguale all'invariante di Singer della varietà (M, g) . Se M è anche semplicemente connessa e completa allora è anche omogenea.*

DIMOSTRAZIONE. Se si considera come connessione canonica la connessione di Levi Civita su $O_g(M)$, dal Teorema 6.2 segue subito che M è localmente omogenea se e solo se è infinitesimalmente omogenea, e poichè la connessione di Levi Civita ha torsione nulla, una varietà pseudo-Riemanniana è infinitesimalmente omogenea se e solo se verifica le ipotesi enunciate. Se per di più, M è semplicemente connessa e completa, ogni isomeria locale di M si estende ad una isometria globale (vedi [KoNo]). $\square$

§7. Equazioni alle derivate parziali e le varietà dei Jet.

Nei lavori originali di S. Lie e E. Cartan (vedi [Ama] per un'ottima introduzione), gli automorfismi di varietà con strutture geometriche assegnate venivano studiati utilizzando i sistemi di equazioni differenziali cui questi automorfismi devono soddisfare. In effetti, l'algebra di Lie di $\text{Aut}(M, P_G)$, o della sua isotropia in un punto, è sempre determinabile risolvendo un opportuno sistema lineare di equazioni differenziali.

Scopo di questo paragrafo e del successivo è quello di fornire alcune relazioni chiave tra i prolungamenti di una G -struttura e lo spazio di soluzioni dei sistemi differenziali che definiscono gli automorfismi. Iniziamo pertanto con una accurata formalizzazione del concetto di sistema di equazioni alle derivate parziali.

Siano $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $g: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ due applicazioni definite su due intorni U e V dell'origine di $\mathbb{R}^n$. Diremo che f e g *coincidono nell'origine fino all'ordine k_o* e lo indicheremo con

$$f \sim_{k_o} g$$

se e solo se per ogni $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq k_o$ e per ogni scelta di indici $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ si ha

$$f|_0 = g|_0 \quad , \quad \frac{\partial^k f^j}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}|_0 = \frac{\partial^k g^j}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}|_0.$$

Se al posto di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^q$, si considerano due varietà C^∞ M e N di dimensione n e q rispettivamente, e se $f: U \subset M \rightarrow N$ e $g: V \subset M \rightarrow N$ sono due applicazioni C^∞ , definite su due intorni U e V di uno stesso punto $p_o \in M$, diremo che f e g *coincidono nel punto p_o fino all'ordine k_o* e lo indicheremo con

$$f \sim_{(p_o, k_o)} g$$

se $f(p_o) = g(p_o)$ e se esistono due sistemi di coordinate

$$x: U' \subset U \cap V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y: U'(\ni f(p_o)) \rightarrow \mathbb{R}^q$$

tali che $x(p_o) = 0$ e le applicazioni

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} y \circ g \circ x^{-1}: x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$$

verificano

$$\tilde{f} \sim_{k_o} \tilde{g} \quad .$$

Nel seguito, per praticità di notazione, se $f: U \subset M \rightarrow N$ è una applicazione liscia fissata e x e y sono due sistemi di coordinate per due intorni $U' \subset U$ e $V' \ni f(U')$, rispettivamente, col simbolo $\tilde{f}$ intenderemo sempre la applicazione reale corrispondente

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} y \circ f \circ x^{-1} \quad . \tag{7.1}$$

ESERCIZIO 7.1. Si dimostri che se due applicazioni f e g verificano $\tilde{f} \sim_{k_o} \tilde{g}$ per qualche scelta delle coordinate, allora lo stesso si verifica per qualunque altra scelta dei sistemi di coordinate.

È semplice controllare che la relazione $\sim_{p_o, k_o}$ sull'insieme delle applicazioni lisce f da aperti di M in N è una relazione di equivalenza. Si può dunque introdurre la seguente definizione.

DEFINIZIONE 7.2. Un *jet di ordine k_o in un punto $p_o \in M$* è un elemento dello spazio quoziente $C_{\text{loc}, p_o}^\infty(M, N) / \sim_{p_o, k_o}$, dove $C_{\text{loc}, p_o}^\infty(M, N)$ indica lo spazio delle applicazioni locali lisce $f: U \subset M \rightarrow N$, dove U è un intorno aperto di p_o .

Per ognuna delle funzioni in una classe di equivalenza, il corrispondente jet di ordine k_o verrà indicato con

$$j^{k_o}(f)_{p_o} \quad .$$

L'insieme di tutti i jet di funzioni da M in N è indicato con

$$J^{k_o}(M; N)$$

o con

$$J^{k_o}(M) \quad ,$$

nel caso $M = N$.

Per ogni jet $j^{k_o}(f)_{p_o} \in J^{k_o}(M; N)$, il punto p_o è detto *sorgente del jet*, mentre il punto $q_o = f(p_o)$ è detto *obiettivo del jet*. L'applicazione da $J^{k_o}(M; N)$ in M che associa ad ogni jet la sua sorgente verrà indicata con π , mentre quella da $J^{k_o}(M; N)$ in N che associa l'obiettivo verrà indicata con π' .

Fissati due sistemi di coordinate x e y per due intorni $U \in M$, $V \in N$, ogni jet $j^{k_o}(f)_{p_o}$ ammette un ovvio *rappresentante canonico*, che indicheremo con $f^{(k_o)}$. Si costruisce come segue: se indichiamo con $p_{j_1 \dots j_m}^i$ i valori delle derivate comuni a tutte le funzioni di una classe di equivalenza,

$$p_{j_1 \dots j_m}^i = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \tilde{f}^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_m}} \Big|_0 \quad (7.2)$$

il *rappresentante canonico* $f^{(k_o)}$ di $j^{k_o}(f)_{p_o}$ è l'applicazione, che, in coordinate, coincide con la funzione polinomiale

$$\tilde{f}^{(k_o)i} = p^i + \sum_j p_j^i x^j + \sum_{j_1, j_2} p_{j_1 j_2}^i x^{j_1} x^{j_2} + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_{k_o}} p_{j_1 \dots j_{k_o}}^i x^{j_1} \dots x^{j_{k_o}} \quad .$$

Possiamo introdurre sull'insieme

$$\mathcal{U} = \pi^{-1}(U) \cap \pi'^{-1}(V) \subset J^{k_o}(M; N)$$

la applicazione

$$x^{(k_o)}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^Q$$

$$x^{(k_o)}(j^{k_o}(f)_p) = (x^i(p); p_{j_1 \dots j_m}^i(j^{k_o}(\tilde{f})_p)) \quad (7.3)$$

dove le funzioni reali $p_{j_1 \dots j_m}^i$ sono definite dalla (7.2). Si tratta di una applicazione biiettiva su di un aperto di $\mathbb{R}^Q$. Lasciamo al lettore la verifica che l'insieme delle coppie del tipo $(\mathcal{U}, x^{(k_o)})$ costituisce un atlante di mappe coordinate su $J^{k_o}(M; N)$; questo atlante definisce su $J^{k_o}(M; N)$ una struttura di varietà differenziabile, e si osservi che, per questa struttura, π e π' sono applicazioni lisce.

In effetti, risulta che le terne $(J^{k_o}(M; N), \pi, M)$ e $(J^{k_o}(M; N), \pi', N)$ realizzano $J^{k_o}(M; N)$ come varietà fibrata su M e su N , rispettivamente.

Per ogni intero $s \leq k_o$, la classe di equivalenza $j_p^{k_o}(f)$ è ovviamente contenuta nella classe di equivalenza $j_p^{k_o-s}(f)$. Possiamo allora considerare la applicazione naturale

$$\pi_{-s}: J^{k_o}(M; N) \rightarrow J^{k_o-s}(M; N)$$

che associa ad ogni classe di equivalenza di $J^{k_o}(M; N)$ quella di $J^{k_o-s}(M; N)$, in cui è contenuta.

ESERCIZIO 7.3. Si dimostri che le applicazioni

$$\pi_{-s}: J^{k_o+s}(M; N) \rightarrow J^k(M; N)$$

($s \geq 1$) sono lisce e determinano strutture di fibrato sulla varietà $J^k(M; N)$.

Ogni applicazione locale liscia $f: U \subset M \rightarrow N$ determina naturalmente una sezione locale nel fibrato $(J^{k_o}(M; N), \pi, M)$:

$$j^{k_o}(f): U \rightarrow J^{k_o}(M; N)$$

$$j^{k_o}(f)(p) \stackrel{\text{def}}{=} j^{k_o}(f)_p$$

È chiaro che a questa sezione corrisponde, in ogni punto $p \in U$, un elemento di

$$J^s(M; J^{k_o}(M; N)) \quad ,$$

il quale è unicamente determinato dalle derivate di f in p fino all'ordine $k_o + s$. Esiste quindi una immersione naturale

$$\iota: J^{k_o+s}(M; N) \rightarrow J^s(M; J^{k_o}(M; N)) \quad . \quad (7.4)$$

Si osservi che l'immagine $\iota(J^{k_o+s}(M; N))$ è determinata in $J^s(M; J^{k_o}(M; N))$ dalle seguenti equazioni in coordinate. Se indichiamo con

$$p_{i_1 \dots i_r}^{j/j_1 \dots j_k} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial p_{j_1 \dots j_k}^j}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \right|_0 \quad (7.5)$$

si ha che un elemento di $J^s(M; J^{k_o}(M; N))$ appartiene a $\iota(J^{k_o+s}(M; N))$ se e solo se

$$p_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j/j_1 j_2 \dots j_k} = p_{j_1 j_2 \dots j_r}^{j/i_1 j_2 \dots j_k} \quad (7.6)$$

per ogni i_m, j_l con $1 \leq m \leq r$, $1 \leq l \leq k$ e $0 \leq r \leq s$, $0 \leq k \leq k_o$.

DEFINIZIONE 7.4. Una sottovarietà $\mathcal{R}^{k_o} \subset J^{k_o}(M; N)$ tale che $\pi(\mathcal{R}^{k_o})$ è un aperto $U \subseteq M$ e tale che $\pi: \mathcal{R}^{k_o} \rightarrow U$ è una fibrazione, è detta *sistema (regolare) di equazioni alle derivate parziali*. L'intero k_o è detto *ordine* del sistema.

Una *soluzione locale* del sistema $\mathcal{R}^{k_o}$ è una qualunque applicazione liscia $f: U \subset M \rightarrow N$ tale che la corrispondente applicazione $j^{k_o}(f): U \rightarrow J^{k_o}(M; N)$ è una sezione locale del fibrato $(\mathcal{R}^{k_o}, \pi, U)$.

La motivazione di questa terminologia è fornita dal fatto che, *sotto opportune condizioni di regolarità*, i sistemi di equazioni alle derivate parziali, come sono comunemente intesi, definiscono di fatto delle sottovarietà dello spazio di jet.

ESEMPIO 7.5. Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione n e si considerino due insiemi di coordinate su due aperti $U, V \subset M$. Una applicazione $f: U \rightarrow V$ è una isometria locale se e solo se, in coordinate, l'applicazione $\tilde{f}$ soddisfa al sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial x^m} g_{ij}(\tilde{f}^1(x), \dots, \tilde{f}^n(x)) = g_{km}(x^1, \dots, x^n) \quad k, m = 1 \dots n \quad (7.7)$$

Ricordando le coordinate (7.3) definite su $\mathcal{U} = \pi^{-1}(U) \cap \pi'^{-1}(V)$, la (7.7) corrisponde alla seguente equazione sui punti di $J^1(M)$

$$p_k^i p_m^j g_{ij}(p^1, \dots, p^n) = g_{km}(x^1, \dots, x^n) \quad (7.8)$$

Indichiamo con $\mathcal{R}^1(M, g)$ il sottoinsieme di $J^1(M)$ definito dalle equazioni (7.8).

Se la metrica g soddisfa opportune condizioni di regolarità su M , $\mathcal{R}^1(M, g)$ è una sottovarietà che si fibra su un aperto di M , ovvero è un sistema regolare di equazioni alle derivate parziali.

Nell'esempio precedente, è importante sottolineare il fatto che la (7.8) *non è equivalente al sistema differenziale (7.7)* nel seguente senso: esistono sezioni locali di $\mathcal{R}^1(M, g)$ che soddisfano la (7.8), ma che non sono sezioni del tipo $j^1(f)$, per nessuna applicazione liscia f . Per determinare quali sezioni di $\mathcal{R}^1(M)$ corrispondono a soluzioni locali, bisogna introdurre il concetto di *prolungamento di un sistema di equazioni alle derivate parziali*.

Sia $\mathcal{R}^{k_o}$ è un sistema regolare. Come già osservato, le derivate prime di una sezione locale di $\mathcal{R}^{k_o} \subset J^{k_o}(M; N)$ determinano naturalmente una sezione locale di

$$J^1(M; \mathcal{R}^{k_o}) \subset J^1(M; J^{k_o}(M; N)) .$$

Indichiamo con $(\mathcal{R}^{k_o})^1$ il sottoinsieme di $J^1(M; J^{k_o}(M; N))$ determinato da tutte le sezioni locali di $\mathcal{R}^{k_o}$.

Ora, se $\sigma: U \rightarrow \mathcal{R}^{k_o}$ è una sezione locale del tipo

$$\sigma = j^{k_o}(f)$$

per qualche applicazione f , i jet della sezione σ devono verificare

$$j^1(\sigma) = j^1(j_o^k(f)) = \iota(j^{k_o+1}(f)) \quad (7.9)$$

dove ι è l'immersione definita in (7.4).

Questo mostra che le sezioni locali date da applicazioni determinano jet di $(\mathcal{R}^{k_o})^1$ che sono elementi di

$$(\mathcal{R}^{k_o})^1 \cap \iota(J^{k_o+1}(M; N)) \quad (7.10)$$

Per costruzione, una applicazione locale f è soluzione di $\mathcal{R}^{k_o}$ se e solo se i suoi jet sono elementi di

$$\iota^{-1}((\mathcal{R}^{k_o})^1 \cap \iota(J^{k_o+1}(M; N))) \quad (7.11)$$

e quindi *nel caso tale insieme sia un sistema regolare di equazioni alle derivate parziali*, avremmo determinato un sistema di equazioni equivalente al precedente ma di ordine $k_o + 1$.

Non sempre la (7.11) costituisce un sistema regolare, comunque esistono vari criteri ed algoritmi per verificarlo. In generale, è importante osservare che, se indichiamo con $\mathcal{F}$ una famiglia di equazioni che determina la sottovarietà $\mathcal{R}^{k_o}$, l'insieme $(\mathcal{R}^{k_o})^1$ è determinato da tutti i punti che soddisfano le equazioni di $\mathcal{F}$ derivate rispetto alle coordinate di M (vedi Esempi 7.7 e 7.8). D'altra parte la sottovarietà $\iota(J^{k_o+1}(M; N))$ è definita dalle equazioni (7.5) e dunque, è possibile valutare se l'insieme (7.11) è una sottovarietà fibrata regolare di $\iota(J^{k_o+1}(M; N))$, studiando il sistema di equazioni dato dalle $\mathcal{F}$ e dalle (7.5).

Possiamo allora introdurre la seguente definizione.

DEFINIZIONE 7.6. Si dice *primo prolungamento* del sistema regolare di equazioni alle derivate parziali $\mathcal{R}^{k_o}$ il sottoinsieme $\mathcal{R}^{k_o(1)} \subset J^{k_o+1}(M; N)$ dato da

$$\mathcal{R}^{k_o(1)} = \iota^{-1}((\mathcal{R}^{k_o})^1 \cap \iota(J^{k_o+1}(M; N))) \quad (7.12)$$

Per ogni intero $n > 1$, si dice *prolungamento di ordine n* l'insieme $\mathcal{R}^{k_o(n)}$ ottenuto come primo prolungamento di $\mathcal{R}^{k_o(n-1)}$.

Il sistema $\mathcal{R}^{k_o}$ è detto *formalmente integrabile* se, per ogni intero $n \geq 1$:

- a) il prolungamento $\mathcal{R}^{k_o(n)}$ è un sistema regolare di equazioni;
- b) la proiezione

$$\pi_{-1}: \mathcal{R}^{k_o(n)} \subset J^{k_o+n}(M; N) \rightarrow \mathcal{R}^{k_o(n-1)} \subset J^{k_o+n-1}(M; N)$$

è suriettiva.

ESEMPIO 7.7. Riprendendo l'Esempio 7.6, si osservi che le equazioni che determinano l'insieme $(\mathcal{R}^{k_o}(M, g))^1$ all'interno di $J^1(M; J^1(M))$ possono essere ottenute derivando le (7.8). Si ottengono allora le equazioni

$$\frac{\partial p_k^i}{\partial x^t} p_m^j g_{ij}(p^1, \dots, p^n) + p_k^i \frac{\partial p_m^j}{\partial x^t} g_{ij}(p^1, \dots, p^n) + p_k^i p_m^j \frac{g_{ij}}{\partial x^l}(p^1, \dots, p^n) \frac{\partial p^l}{\partial x^t} =$$

$$= \frac{\partial g_{km}}{\partial x^t}(x^1, \dots, x^n) \quad (7.13)$$

che diventano, nelle coordinate (7.4) di $J^1(M; J^1(M))$,

$$\begin{aligned} p_t^{i/k} p^{j/m} g_{ij}(p^1, \dots, p^n) + p^{i/k} p_t^{j/m} g_{ij}(p^1, \dots, p^n) + p^{i/k} p^{j/m} \frac{g_{ij}}{\partial x^v}(p^1, \dots, p^n) p_t^v = \\ = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^t}(x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Le (7.13) unitamente alle (7.5) determinano $(\mathcal{R}^{k_o}(M, g))^1 \cap \iota(J^{k_o+1}(M))$ e quindi il primo prolungamento $\mathcal{R}^{1(1)}(M, g)$.

ESEMPIO 7.8. Indichiamo con $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ l'insieme delle funzioni tali che il sistema

$$f_\alpha = 0$$

è il sistema che definisce il primo prolungamento $\mathcal{R}^{k_o(1)}$ di un sistema $\mathcal{R}^{k_o}$. Sia poi $\mathcal{F}_{tot}$ l'ideale nello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ generato da $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$: è chiaro che ogni elemento di $\mathcal{R}^{k_o(1)}$ soddisfa anche tutte le equazioni del tipo

$$f = 0 \quad f \in \mathcal{F}_{tot} . \quad (7.15)$$

Spesso, fra le (7.15), esistono equazioni, in cui compaiono solo componenti di jet di ordine k_o e indipendenti da quelle del sistema di definizione di $\mathcal{R}^{k_o}$. Se questo si verifica, la proiezione

$$\pi_{-1}: \mathcal{R}^{k_o(1)} \rightarrow \mathcal{R}^{k_o}$$

è chiaramente non suriettiva.

Per fare un esempio, si consideri il seguente sistema $\mathcal{R}^1 \subset J^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = h_i(f(x_1, x_2), x_2) \quad (7.16)$$

con h_i , $i = 1, 2$, funzioni reali assegnate. Alle (7.16) corrispondono le equazioni nelle coordinate (7.4)

$$p_i = h_i(p, x_2) \quad (7.17)$$

Le equazioni che definiscono l'insieme $(\mathcal{R}^1)^1 \cap \iota(J^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$ sono

$$p_m^{/i} = \frac{\partial h_i}{\partial x^1}(p, x_2) p_m + \frac{\partial h_i}{\partial x^2}(p, x_2) \delta_{2m} \quad (7.18)$$

$$p_m^{/i} = p_i^{/m} \quad (7.18)$$

L'ideale di equazioni generato dalle (7.18) contiene anche l'equazione

$$\frac{\partial h_i}{\partial x^1}(p, x_2) p_m + \frac{\partial h_i}{\partial x^2}(p, x_2) \delta_{2m} - \frac{\partial h_m}{\partial x^1}(p, x_2) p_i - \frac{\partial h_m}{\partial x^2}(p, x_2) \delta_{2i} = 0 \quad (7.20)$$

che non è contenuta nell'ideale generato dall'equazione (7.17). In altre parole, non tutti i jet che verificano la (7.17) sono ottenibili come $\pi_{-1}(j^2(f))$ di qualche jet che verifica il prolungamento definito dalla (7.18) - (7.20).

L'equazione (7.20) che compare effettuando il prolungamento del sistema è un esempio di ciò che spesso viene chiamato come *condizione di integrabilità del sistema di partenza*.

OSSERVAZIONE 7.9. L'esempio precedente serve a chiarire la condizione b) per i sistemi formalmente integrabili. Infatti, se tale condizione si verifica, per ogni jet $j^{k_o}(f)_p \in \mathcal{R}^{k_o}$ e per ogni intero $s \geq 0$ esiste un jet $j^{k_o+s}(f)_p$, che verifica tutte le equazioni del prolungamento di ordine s e tale che

$$\pi_{-s}j^{k_o+s}(f)_p = j^{k_o}(f)_p$$

Fissato un sistema di coordinate intorno al punto p , questo è equivalente a dire che, per ogni applicazione polinomiale $f^{(k_o)}$ che rappresenta un jet in $\mathcal{R}^{k_o}$ è possibile costruire una serie formale di potenze $f^{(\infty)}$ che ammette come primi k_o termini l'applicazione $f^{(k_o)}$ e le cui espansioni troncate all'ordine $k_o + s$ soddisfano sempre tutte le equazioni dei prolungamenti di ordine $k_o + s$. Se inoltre, per qualche intero s_o , i prolungamenti $\mathcal{R}^{k_o(s)}$, $s \geq s_o + 1$ sono tali che le proiezioni $\pi_{-1}: \mathcal{R}^{k_o(s)} \rightarrow \mathcal{R}^{k_o(s-1)}$ sono *bijettive*, si ha anche che la serie $f^{(\infty)}$ è *univocamente determinata* dai termini di ordine minore o uguale a $k_o + s_o$.

§8. Equazioni differenziali soddisfatte dagli automorfismi di una G -struttura.

Concludiamo qui lo studio degli automorfismi di una G -struttura. Il punto principale di questa sezione è costituito dal Teorema 8.6 che fornisce un'interpretazione dell'ordine k di una G -struttura in termini di equazioni differenziali.

Risulta infatti che l'intero k costituisce un limite superiore per l'ordine del sistema di equazioni differenziali che definisce gli automorfismi di P_G . Una conseguenza importante è che se due automorfismi coincidono in un punto fino alle derivate di ordine k , allora coincidono ovunque.

Cominciamo con la descrizione delle equazioni differenziali che sono soddisfatte dagli elementi di $Aut_{loc}(M, P_G)$.

Nel seguito, ci limiteremo a considerare solo diffeomorfismi locali da M in sé. L'insieme dei jet di ordine k_o dei diffeomorfismi locali è definito, in coordinate, dalla disequazione

$$\det \left[\frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial x^i} \right] \neq 0 \quad (8.1)$$

ed è quindi un sottoinsieme aperto di $J^{k_o}(M)$. Lo indicheremo con

$$Diff^{k_o}(M) .$$

Inoltre, in tutti i sistemi di equazioni alle derivate parziali che andremo a considerare in questo paragrafo, supporremo sempre la condizione (8.1).

Sia P_G una G -struttura su M e siano p, q due punti di M . Per determinare quali siano le condizioni differenziali che un diffeomorfismo locale f con $f(p) = q$ debba verificare per appartenere a $Aut_{loc}(M, P_G)$, operiamo come segue. Siano σ e σ' due sezioni locali di P_G definite su intorni U e V di p e q rispettivamente. Allora $f: U' \subset U \rightarrow M$ è un elemento di $Aut_{loc}(M, P_G)$ se e solo se esiste una applicazione $g: f(U') \rightarrow G$ tale che

$$(f_* \circ \sigma)(x) = \sigma'(f(x)) \cdot g(x) \quad (8.2)$$

per ogni $x \in U'$. Per qualunque scelta delle sezioni σ e σ' e per qualunque diffeomorfismo f , esiste un elemento $A_f(x) \in GL(n, \mathbb{R})$ (dipendente da f e da $x \in U$) tale che

$$(f_* \circ \sigma)(x) = \sigma'(f(x)) \cdot A_f(x) .$$

Dunque la (8.2) è equivalente ad affermare che $A_f(x) \in G$ e costituisce quindi un sistema di rango costante sulle componenti dei jet di ordine 1 in

$$\mathcal{U} = \pi^{-1}(U) \cap \pi'^{-1}(V) \subset Diff^1(M) .$$

Per di più, se un jet $j^1(f)_p$ soddisfa le (8.2), soddisfa anche le analoghe equazioni per qualunque altra scelta delle sezioni locali di P_G . Infatti, se ρ e ρ' sono altre due sezioni locali di P_G , esistono due applicazioni g_ρ e $g_{\rho'}$ a valori in G tali che

$$\rho = \sigma \cdot g_\rho$$

$$\rho' = \sigma' \cdot g_{\rho'}$$

e quindi un diffeomorfismo locale verifica la

$$(f_* \circ \rho)(p') = \rho'(p) \cdot g(p') \quad (8.3)$$

se e solo se verifica un'equazione del tipo

$$(f_* \circ \sigma)(x) = \sigma'(f(x)) \cdot g_{\rho'}(x) \cdot g(x) \cdot g_{\rho}^{-1}(x) = \sigma'(f(x)) \cdot \tilde{g}(x) .$$

Di conseguenza, si può univocamente associare a P_G la seguente sottovarietà di $Diff^1(M)$:

$$\begin{aligned} Aut^1(M, P_G) = \{ j_p^1(f) \in Diff^1(M) : \\ \tilde{f} \text{ verifica (8.2) per qualche scelta di } \sigma \text{ e } \sigma' \} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Lasciamo al lettore la verifica della seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 8.1. *Per ogni G -struttura, $Aut^1(P_G, M)$ è un sistema regolare di equazioni alle derivate parziali.*

Per ogni punto $p_o \in M$, definiamo come $Aut_{p_o}^1(P_G, M)$ la sottovarietà

$$Aut_{p_o}^1(P_G, M) = \{ j^1(f)_{p_o} \in Aut^1(P_G, M) : f(p_o) = p_o \}$$

mentre

$$Aut_o^1(P_G, M) = \bigcup_{p \in M} Aut_p^1(P_G, M)$$

Si osservi che $Aut_o^1(P_G, M)$ è una sottovarietà liscia di $Diff^1(M)$ e che su di essa esiste una naturale azione libera di G . Infatti, per ogni $g \in G$ ed ogni jet $j^1(f)_p \in Aut_o^1(P_G, M)$, si consideri un riferimento $u \in \pi^{-1}(p) \in P_G$ ed un sistema di coordinate con

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p = X_j = u(e_j) .$$

Si definisce il jet $j^1(f')_p = j^1(f)_p \cdot g$ come il jet corrispondente al diffeomorfismo locale f' , con espressione in coordinate $\tilde{f}'$, il cui Jacobiano è

$$\left[\frac{\partial \tilde{f}'^i}{\partial x^j} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial x^k} \right] \cdot [g_j^k] .$$

(si è indicato con $[g_j^i]$ la matrice corrispondente all'azione di g sul riferimento u).

Si può verificare che $Aut_o^1(P_G, M)$ è un fibrato principale su M con gruppo strutturale G . Anzi, abbiamo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 8.2. $Aut_o^1(P_G, M)$ è equivalente a P_G .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di M tale che P_G sia banale su ciascun U_i . Per ogni $i \in I$, fissiamo un diffeomorfismo G -equivariante

$$\phi_i: U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

e sia σ_i la sezione locale su U_i definita da $\sigma_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i(x, e)$. Si fissi poi una base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ per lo spazio modello V di TM e, per ogni punto $x \in U_i$, si consideri un sistema di coordinate locali tale che

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x = \sigma_x(e_j)$$

Per ogni punto p , si può definire la funzione

$$f_{(p)}^i = x^i$$

e si noti che il suo jet $j^1(f_{(p)})_p$ è univocamente associato a $\sigma_i(p)$ ed appartiene a $Aut_o^1(P_G, M)$. Si definisce allora, per ogni $i \in I$,

$$\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \subset P_G \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset Aut_o^1(P_G, M)$$

$$\psi_i(\phi_i(x, g)) = j^1(f_{(x)})_x \cdot g.$$

Lasciamo al lettore verificare che ogni applicazione ψ_i è G -equivariante, liscia ed indipendente dalla scelta dell'applicazione ϕ_i . In particolare si ha, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, che

$$\psi_i|_{U_i \cap U_j} = \psi_j|_{U_i \cap U_j}$$

e che quindi esiste un'applicazione globale

$$\psi: P_G \rightarrow Aut_o^1(P_G, M)$$

che realizza un'equivalenza di fibrati. $\square$

Consideriamo ora il primo prolungamento $Aut^{1(1)}(M, P_G)$ di $Aut^1(M, P_G)$ e indichiamo con $Aut_o^2(M, P_G)$ l'immagine inversa in $Aut^{1(1)}(M, P_G)$ della sottovarietà $Aut_o^1(M, P_G)$. Possiamo anche considerare i vari prolungamenti $Aut^{1(s)}(M, P_G)$ e definire ricorsivamente gli insiemi di jet $Aut_o^{s+1}(M, P_G)$ come

$$Aut_o^{s+1}(M, P_G) = (\pi_{-1})^{-1}(Aut_o^s(M, P_G)) \cap Aut^{1(s)}(M, P_G)$$

Senza ulteriori ipotesi di regolarità sulla G struttura, non ci si può aspettare che i prolungamenti $Aut^{1(s)}(M, P_G)$ siano tutti sottofibrati di $Diff^{s+1}(M)$, nè che lo siano gli insiemi $Aut_o^{s+1}(M, P_G)$. Abbiamo tuttavia la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 8.3. *Per ogni intero n , un qualunque fibra della proiezione*

$$\pi_{-1}: \text{Aut}_o^n(M, P_G) \rightarrow \text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G)$$

è diffeomorfa al prolungamento n -esimo $G^{(n)}$.

OSSERVAZIONE 8.4. Dalla Proposizione 8.3 si può dedurre che, nel caso in cui $\text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G)$ sia una varietà regolare e l'applicazione π_{-1} fra $\text{Aut}_o^n(M, P_G)$ e $\text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G)$ sia suriettiva, allora $\text{Aut}_o^n(M, P_G)$ è un fibrato principale su $\text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G)$ ed in particolare una sottovarietà regolare di $\text{Diff}^n(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa, abbiamo bisogno del seguente lemma.

LEMMA 8.5. *Per ogni intero n , $G^{(n)}$ è diffeomorfo alla fibra della proiezione*

$$\pi_{-1}: J^n(M; G) \rightarrow J^{n-1}(M; G)$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con e la applicazione costante da M in G

$$e(p) = e \in G$$

dove e è l'unità di G . Fissiamo una base $\{e_i\}$ per V in modo tale che gli elementi di $G \subset GL(V)$ siano rappresentabili dalle matrici g_j^i tali che

$$g(e_j) = g_j^i e_i$$

Prendiamo poi un punto $p_o \in M$ ed un sistema di coordinate intorno a p_o . Gli elementi

$$(\pi_{-1})^{-1}(j_{p_o}^{n-1}(e)) \subset J^n(M; G)$$

sono jet che ammettono come rappresentanti polinomiali le seguenti applicazioni

$$g_k^i(x^1, \dots, x^n) = \delta_k^i + \frac{1}{n!} g_{k/j_1 \dots j_n}^i x^{j_1} \dots x^{j_n}$$

Si osservi che le costanti $g_{k/j_1 \dots j_n}^i$ verificano la seguente condizione: per ogni curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la matrice

$$g(t)_j^i = \delta_j^i + \frac{1}{n!} g_{j/j_1 \dots j_n}^i \alpha^{j_1}(t) \dots \alpha^{j_n}(t)$$

è una curva in G . Quindi, per ogni scelta di una curva tale che $\alpha(0) = 0_{\mathbb{R}^n}$ abbiamo che $g(0)_j^i = \delta_j^i$ e che la derivata

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} g(t)_j^i \right|_0 = \frac{1}{(n-1)!} g_{k/j_1 \dots j_n}^i \left. \frac{d\alpha^{j_1}}{dt} \right|_0 \dots \left. \frac{d\alpha^{j_n}}{dt} \right|_0 \quad (8.5)$$

è un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{G}$. Per l'arbitrarietà del vettore

$$v = \left(\left. \frac{d\alpha^{j_1}}{dt} \right|_0, \dots, \left. \frac{d\alpha^{j_n}}{dt} \right|_0 \right) \in \mathbb{R}^n$$

la (8.5) dimostra che i coefficienti $g_{k/j_1 \dots j_n}^i$ determinano un elemento di

$$T \in \text{Hom}(S^n(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \quad (8.6)$$

tale che

$$T(v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{G} \quad \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n. \quad (8.7)$$

D'altra parte, dal paragrafo §3, sappiamo che $G^{(n)}$ è identificabile proprio con lo spazio vettoriale degli elementi che verificano la (8.6) e (8.7). Perciò la corrispondenza

$$j^n(g)_{p_o} \mapsto \frac{\partial^n g_k^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_n}}$$

realizza un diffeomorfismo fra la fibra $(\pi_{-1})^{-1}(j_{p_o}^{n-1}(e))$ e $G^{(n)}$. $\square$

Dai risultati del Lemma 8.5, per ogni punto $p \in M$ ci conviene indicare con ι_p il diffeomorfismo fra $G^{(n)}$ e la fibra di $J^n(M; G)$ sopra il jet $j^{n-1}(e)_p$.

A questo punto, osserviamo che per ogni elemento $g \in G^{(n)}$ possiamo definire una applicazione

$$g: \text{Aut}_o^n(M, P_G) \rightarrow J^n(M)$$

come segue. Per ogni $j^n(f)_p \in \text{Aut}_o^n(M, P_G)$ si consideri un sistema di coordinate tali che i vettori

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_0$$

costituiscono un riferimento di P_G sopra al punto p . Sia poi

$$g_k^i(x^1, \dots, x^n) = \delta_k^i + \frac{1}{n!} g_{k/j_1 \dots j_n}^i x^{j_1} \dots x^{j_n} \quad (8.8)$$

il rappresentante canonico del jet $\iota_p(g)$ e si definisca

$$g(j_p^n(f)) \stackrel{\text{def}}{=} j_p^n(f \circ g_k^i(x^1, \dots, x^n))$$

Si verifica subito che se il jet $j^n(f)_p$ verificava le (8.2) con tutti i prolungamenti fino all'ordine n , allora anche $g(j^n(f)_p)$ le verifica ed è quindi elemento della stessa fibra di $j^n(f)_p$.

Dalla definizione si vede che $G^{(n)}$ trasforma ciascuna fibra di $\text{Aut}_o^n(M, P_G)$ in se stessa e che l'azione indotta è libera. La dimostrazione sarà conclusa se faremo vedere che l'azione è transitiva. Per questo basta osservare che se $j^n(f)_p$ e $j^n(h)_p$ appartengono a $\text{Aut}_o^n(M, P_G)$ e si proiettano sullo stesso elemento in

$$\text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G) \quad ,$$

allora il jet $j_p^n(h \circ f^{-1})$ è ancora un elemento di $\text{Aut}_o^n(M, P_G)$ che si proietta sul jet

$$j^{n-1}(\text{id}_M)_p \in \text{Aut}_o^{n-1}(M, P_G)$$

Derivando le (8.2) fino all'ordine n , si può controllare che i jet che si proiettano su $j^{n-1}(\text{id}_M)_o$ sono tutti e soli della forma (8.8). $\square$

Possiamo allora concludere con il seguente teorema, che costituisce l'obiettivo principale di questa sezione.

TEOREMA 8.6. *Sia P_G una G -struttura di ordine finito k_o . Se f e g sono due elementi di $Aut_{loc}(M, P_G)$ tali che*

$$j^{k_o}(f)_p = j^{k_o}(g)_p \quad (8.9)$$

allora, per ogni intero $k \geq k_o$

$$j^k(f)_p = j^k(g)_p \quad (8.10)$$

In caso f e g siano analitiche reali, (8.9) implica che

$$f \equiv g$$

su un intorno di p .

Se $Aut_{loc}(M, P_G)$ è costituito da tutte e sole le soluzioni locali di un sistema regolare di equazioni alle derivate parziali $\mathcal{R}^m \subset Diff^m(M)$ formalmente integrabile, esiste sempre un sistema differenziale, formalmente integrabile, che definisce $Aut_{loc}(M, P_G)$ ed il cui ordine è inferiore o uguale a k_o .

DIMOSTRAZIONE. Dalla (8.9) segue che

$$j^{k_o+1}(f \circ g^{-1})_p$$

è un elemento di $Aut_o^{k_o+1}(M, P_G)$ e che si proietta su

$$j^{k_o}(id_M)_p \quad .$$

Per la Proposizione 8.3, l'immagine inversa in $Aut_o^{k_o+1}(M, P_G)$ della proiezione è diffeomorfa al gruppo $G^{(k_o+1)}$, il quale per ipotesi è costituito dal solo elemento neutro. Perciò $j^{k_o+1}(f \circ g^{-1})_p$ deve coincidere con $j^{k_o+1}(id_M)_p$ e quindi

$$j^{k_o+1}(f)_p = j^{k_o+1}(g)_p \quad .$$

Ricorsivamente, si dimostra la (8.10) per ogni altro intero $k = k_o + s$, $s \geq 1$.

Dalla (8.10) segue che gli sviluppi in serie di Taylor dei diffeomorfismi f e g , in qualche sistema di coordinate intorno a p_o , coincidono. Da cui l'identità delle due applicazioni, nel caso siano analitiche reali.

Per concludere, supponiamo che $\mathcal{R}^m$ sia un sistema alle derivate parziali formalmente integrabile e che definisce $Aut_{loc}(M, P_G)$ e sia con $m > k_o$. Per la (8.10), le fibre della proiezione

$$\pi_{k_o-m}: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^{k_o} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{k_o-m}(\mathcal{R}^m) \subset Diff^{k_o}(M)$$

sono tutte costituite da un solo punto e quindi la proiezione π_{k_o-m} costituisce una immersione regolare di $\mathcal{R}^m$ in $Diff^{k_o}(M)$.

In particolare, l'immagine $\mathcal{R}^{k_o}$ è un sistema regolare alle derivate parziali che definisce i diffeomorfismi di $Aut_{loc}(M, P_G)$. $\square$

CAPITOLO III

AZIONI PROPRIE E SPAZI DI ORBITE

§1. Il teorema della fetta per le azioni proprie.

DEFINIZIONE 1.1. Sia G un gruppo di Lie che agisce su una varietà M . Diremo che l'azione è *propria* se l'applicazione

$$\begin{aligned}\Phi : G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, m) &\mapsto (g(m), m)\end{aligned}\tag{1.1}$$

è propria. In tal caso diremo che G *agisce propriamente*.

È chiaro che se l'azione è propria, allora un qualunque sottogruppo di isotropia G_p , $p \in M$, è un sottogruppo compatto. Inoltre vale la seguente Proposizione.

PROPOSIZIONE 1.2. *Si consideri un gruppo di Lie G che agisce su una varietà M . L'azione è propria se e solo se, per ogni coppia di punti $p, q \in M$, esistono due intorni U_p, U_q di p e q , rispettivamente, tali che l'insieme*

$$G(U_p, U_q) = \{g \in G, \quad g(U_p) \cap U_q \neq \emptyset\}\tag{1.2}$$

è relativamente compatto in G .

DIMOSTRAZIONE. Siano p e q due punti di M e mostriamo che se la applicazione Φ è propria allora $G(U_p, U_q)$ è relativamente compatto in G , per qualche U_p e U_q .

Se $p \notin G(q)$, ovvero se $(p, q) \notin \Phi(G \times M)$, basta osservare che, poichè $\Phi(G \times M)$ è chiuso in $M \times M$, esistono due intorni U_p e U_q tali che

$$U_p \times U_q \cap \Phi(G \times M) = \emptyset$$

e quindi

$$G(U_q, U_p) = \emptyset \quad .$$

Se invece $p \in G(q)$, si osservi che l'insieme

$$\Phi^{-1}(\{p\} \times \{q\}) = G(\{q\}, \{p\}) \times \{q\}$$

è compatto essendo Φ propria, per ipotesi. Allora anche $G(\{q\}, \{p\})$ è compatto ed ammette un intorno compatto W . Ne segue che l'insieme $W \times M$ è un intorno di

$\Phi^{-1}(\{q\} \times \{p\})$ e, poichè Φ è propria, esiste un intorno di (p, q) del tipo $U_p \times U_q$ tale che

$$\Phi^{-1}(U_p \times U_q) \subseteq W \times M \quad .$$

Si osservi allora che la proiezione di $\Phi^{-1}(U_p \times U_q)$ su G coincide con $G(U_q U_p)$ e che, essendo contenuta nel compatto W , è relativamente compatta in G .

Dimostriamo ora che la condizione (1.2) è sufficiente affinché Φ sia propria. Dal momento che (1.2) implica che l'insieme

$$\Phi^{-1}(p, q) = G(\{q\}, \{p\}) \times \{q\}$$

è compatto, abbiamo solo bisogno di far veder che l'applicazione Φ è chiusa.

Prima di tutto osserviamo che, per ogni $p \in M$ ed ogni intorno aperto W dell'isotropia $G_p \subseteq G$, esiste un intorno U_p tale che

$$G(U_p, U_p) \subseteq W \quad .$$

Per dimostrarlo, si consideri un intorno U'_p di p tale che $G(U'_p, U'_p)$ sia relativamente compatto e si indichi con A l'insieme

$$A = G(U'_p, U'_p) \setminus W$$

Per costruzione, $\overline{A} \cap G_p = \emptyset$ e per ogni $t \in \overline{A}$ esiste un intorno W_t di t in G ed un corrispondente intorno $U_p^{(t)}$ di p in M tale che l'insieme

$$(W_t \cdot U_p^{(t)}) \cap U_p^{(t)} = \emptyset \quad .$$

Poichè la chiusura $\overline{A}$ è compatta esiste un insieme finito I di elementi $t \in A$ tali che $A \subseteq \bigcup_{t \in I} W_t$. Se poniamo

$$U_p = U'_p \cap \bigcap_{t \in I} U_p^{(t)}$$

otteniamo che

$$G(U_p, U_p) \subseteq G(U'_p, U'_p)$$

e che

$$G(U_p, U_p) \cap A \subseteq \left\{ \bigcap_{t \in I} G(U_p^{(t)}, U_p^{(t)}) \right\} \cap \bigcup_{t \in I} W_t = \emptyset$$

ovvero che $G(U_p, U_p) \subseteq W$.

Continuiamo ora osservando che l'immagine $\Phi(G \times M)$ è chiusa in $M \times M$: infatti se $\Phi(g_n, m_n)$ converge a $(p, q) \in M \times M$, allora la successione $\{m_n\}$ converge a q ed esistono intorni U, V di p e q rispettivamente tali che $G(V, U)$ sia relativamente compatto in G e $\{g_n\}$ appartenga definitivamente a $G(V, U)$. La tesi segue allora immediatamente.

Prendiamo ora un sottoinsieme chiuso $C \subset G \times M$ ed osserviamo che $\overline{\Phi(C)} \subset \Phi(G \times M)$. Sia allora $(p, q) \in \overline{\Phi(C)}$ e proviamo che $(p, q) \in \Phi(C)$.

Supponiamo che ciò sia falso. Dal fatto che C è chiuso e che $\Phi^{-1}(p, q) = gG_q \times \{q\}$ per qualche $g \in G$ tale che $g(q) = p$, questo implica che esiste un intorno W di G_q e un intorno U'_q di q tali che

$$(gW \times U'_q) \cap C = \emptyset$$

Prendiamo allora un intorno U_q contenuto in U'_q e tale che $G(U_q, U_q) \subset W$. Segue allora che

$$\Phi^{-1}(gU_q \times U_q) \cap C \subseteq (gG(U_q, U_q) \times U_q) \cap C \subseteq (gW \times U'_q) \cap C = \emptyset \quad .$$

Ma questo non è possibile, perchè vorrebbe dire che $(gU_q \times U_q) \cap \Phi(C) = \emptyset$, mentre per ipotesi (p, q) è nella chiusura di $\Phi(C)$. $\square$

Dalla precedente proposizione segue subito che, per ogni azione propria, ogni punto $p \in M$ ammette un intorno U_p tale che $G(U_p, U_p)$ è relativamente compatto in G . Le azioni che godono di quest'ultima proprietà sono state denominate da R. Palais come *azioni di Cartan* (n.b.: in onore di Henri Cartan e non di Elie Cartan). D'altra parte, segue immediatamente dalla definizione che ogni azione di un gruppo compatto G è propria. In altre parole, ci troviamo di fronte a tre importanti classi di azioni: la classe $\mathcal{A}_o$ delle azioni di gruppi compatti, la classe $\mathcal{A}_p$ delle azioni proprie e la classe $\mathcal{A}_C$ delle azioni di Cartan, ognuna delle tre propriamente contenuta nella successiva.

In questo capitolo, incominceremo lo studio della struttura dello spazio delle orbite per quanto riguarda le azioni della classe $\mathcal{A}_p$ e dimostreremo, fra l'altro, che una azione Θ è nella classe $\mathcal{A}_p$ soltanto se esiste una metrica Riemanniana $\mathbf{g}$ su M tale per cui ogni diffeomorfismo di $\rho_\Theta(G)$ risulta una isometria per $\mathbf{g}$. Viceversa, se $\rho_\Theta(G)$ è un sottogruppo *chiuso* del gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana $(M, \mathbf{g})$, allora Θ è una azione propria. Quindi, la classe $\mathcal{A}_p$ e la classe $\mathcal{A}_I$ delle azioni isometriche sono intimamente correlate fra loro e questo fornisce una forte motivazione per lo studio delle azioni proprie.

È tuttavia importante tener presente che gran parte dei risultati ottenuti saranno conseguenza del cosiddetto Teorema della Fetta (Teorema 1.4) e che, in [Pal 2], R. Palais ha dimostrato che la classe più ampia possibile di azioni per cui sia dimostrabile il Teorema della Fetta coincide esattamente con la classe $\mathcal{A}_C$ delle azioni di Cartan.

Procediamo dunque con la dimostrazione del Teorema della Fetta. Fissato un gruppo di Lie G che agisce propriamente su M , poniamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.3. Sia $p \in M$ e sia $G(p) = G/G_p$ l'orbita di G passante per p . Diremo che una sottovarietà S passante per p è una *fetta* G_p -*invariante* (o " G_p -*slice*") *centrata in* p se

- a) $GS = \{g(s); g \in G, s \in S\}$ è aperto in M ;
- b) Se $g \in G$ e $x \in S$, allora $g(x) \in S$ se e solo se $g \in G_p$.

La condizione (b) dice innanzitutto che S è un G_p -spazio. Inoltre possiamo definire un'applicazione G -equivariante $f : GS \rightarrow G/G_p$ data da $f(gs) = [g]$, dove

$[g]$ denota la classe di g in G/G_p . È chiaro che la condizione (b) garantisce anche che l'applicazione f è ben definita; inoltre $f^{-1}([G_p]) = S$.

Il seguente teorema garantisce l'esistenza delle "fette" intorno a qualunque punto $p \in M$ e dalla loro stessa costruzione si potranno dedurre molte altre importanti proprietà.

TEOREMA 1.4. *Se G agisce propriamente su M , allora per ogni $p \in M$, il gruppo di isotropia G_p è compatto ed esiste una fetta G_p -invariante.*

DIMOSTRAZIONE. Che G_p sia compatto, segue immediatamente dalla definizione di azione propria.

Ora, poichè G_p è compatto, si può affermare che esiste una metrica Riemanniana G_p -invariante su M : infatti, indicata con μ la misura biinvariante di Haar su G_p e presa una qualunque metrica Riemanniana $\mathbf{h}$ su M , possiamo porre per $X, Y \in T_p M$

$$\mathbf{g}(X, Y) = \frac{1}{\mu(G_p)} \int_{G_p} \mathbf{h}_{\ell(m)}(\ell_*(X), \ell_*(Y)) d\mu(\ell)$$

ed è chiaro che $\mathbf{g}$ è una metrica Riemanniana G_p -invariante.

Sia ora $\exp_p : \mathcal{U} \subset T_p M \rightarrow M$ l'applicazione esponenziale (rispetto alla metrica $\mathbf{g}$), definita su un aperto $\mathcal{U}$ di $T_p M$; poniamo inoltre

$$D(r) = \{v \in T_p G(p)^\perp; \mathbf{g}(v, v) < r\}$$

e scegliamo r sufficientemente piccolo in modo che $\exp_p|_{D(r)}$ sia un'immersione. Vogliamo provare che, per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $S_r = \exp_p(D(r))$ è una fetta G_p -invariante.

Verifichiamo la proprietà (a). Indichiamo con $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{K}$ le algebre di Lie di G e G_p rispettivamente e scegliamo un sottospazio $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{G}$ che sia un supplementare di $\mathfrak{K}$; preso un intorno V di 0 in $\mathfrak{m}$, tale che l'esponenziale $\exp|_V$ del gruppo G sia un diffeomorfismo, poniamo $P = \{\exp(v); v \in V\}$ e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \alpha : S_r \times P &\rightarrow M \\ (x, g) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

È facile verificare che il differenziale $\alpha_{(p,e)*}$ ha rango massimo pari a $\dim(S_r \times P) = \dim M$ e pertanto α stabilisce un diffeomorfismo di un intorno aperto $U \times W$ di (p, e) su un intorno aperto U_p di p in M . Possiamo supporre che $U = S_r$ e $W = P$, eventualmente restringendo r e l'intorno V di 0 in $\mathfrak{m}$; in tal modo $A = \alpha(S_r \times P)$ è aperto in M . Se $g_o s_o \in GS_r$, con $s_o \in S_r$, allora $g_o A$ è un aperto contenente $g_o s_o$ e contenuto in GS_r e questo dimostra che GS_r è aperto.

Prima di verificare la proprietà (b), si osservi che una versione, per così dire, 'locale' di quella proprietà è già verificata per ogni insieme S_r . Infatti, se si considera un intorno $V' \subset \mathfrak{G}$ dello 0 tale che $V' \cap \mathfrak{m} = V$ e che $\exp|_{V'}$ è un diffeomorfismo, allora se $g \in P' = \exp(V')$ e $x \in S$, si ha che $g(x) (= \alpha(x, g)) \in S_r$ se e soltanto se $g \in P' \cap G_p$.

Ma la costruzione di S_r non garantisce che tale proprietà debba essere verificata per tutti gli elementi $g \in G$. Vogliamo dimostrare che, restringendo r in maniera opportuna, la (b) è di fatto verificata.

Supponiamo per assurdo che S_r non soddisfi (b) per alcun r positivo. Ne segue che possiamo trovare successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergenti a p con $x_n, y_n \in S_{\frac{1}{n}}$ e $g_n(x_n) = y_n$ per opportuni $g_n \in G \setminus G_p$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Poichè l'azione è propria, possiamo trovare un intorno $U(p)$ di p tale che l'insieme $G(U(p), U(p))$ sia relativamente compatto: la successione $\{g_i\}$ appartiene definitivamente a $G(U(p), U(p))$ e quindi contiene una sottosuccessione convergente ad un elemento $g \in G$. Si noti che $g \in G_p$ e quindi, sostituendo la successione x_i con $g(x_i)$ e g_i con $g_i g^{-1}$, possiamo supporre che $g = e$.

Osserviamo ora che l'applicazione $\mathfrak{m} \times \mathfrak{K} \ni (\xi, \eta) \mapsto \exp(\xi) \cdot \exp(\eta)$ è un diffeomorfismo di un intorno di $(0, 0)$ su un intorno di $e \in G$ e quindi la successione g_i si potrà scrivere, per i sufficientemente grandi, come $g_i = a_i \cdot b_i$, con $a_i \in P$ e $b_i \in G_p$, $a_i \neq e$.

Consideriamo ora l'applicazione α usata nella dimostrazione del punto (a) e osserviamo che, per valori di i sufficientemente grandi,

$$\alpha(b_i(x_i), a_i) = a_i b_i(x_i) = g_i(x_i) = y_i = \alpha(y_i, e) \quad ;$$

poichè $b_i(x_i) \in S_r$ e α è iniettiva, abbiamo che $b_i(x_i) = y_i$ e $a_i = e$; una contraddizione. $\square$

Dalla dimostrazione stessa dell'esistenza della fetta, abbiamo anche che un intorno U_p di $p \in M$ è diffeomorfo al prodotto $S \times P$. D'altra parte, è possibile, restringendo eventualmente l'insieme $P = \exp(V)$, far sì che l'applicazione

$$\theta: P \rightarrow G(p)$$

$$\theta(g) \stackrel{\text{def}}{=} g(p)$$

sia un diffeomorfismo fra P ed un intorno $\mathcal{U}(p) = \theta(P)$ di p nell'orbita $G(p)$. Ne segue che l'aperto U_p è effettivamente diffeomorfo al prodotto $S \times \mathcal{U}(p)$ della fetta S e dell'aperto $\mathcal{U}(p) \subset G(p)$, tramite l'applicazione $(\alpha \circ (Id \times \theta))^{-1}$.

Quest'ultima proprietà è resa ancor più interessante dal fatto che il Teorema della Fetta permette anche di descrivere l'azione locale di G .

A questo scopo, apriamo ora una parentesi, ricordando alcuni fatti ben noti sui fibrati associati a fibrati principali (vedi e.g. [KoNo]). Se G è un gruppo di Lie, H un sottogruppo chiuso di G e Y una varietà su cui H agisce a sinistra, è possibile definire una azione di H sul prodotto $G \times Y$ nel modo seguente: basta porre per ogni $(g, y) \in G \times Y$ e $h \in H$,

$$h((g, y)) = (gh, h^{-1}y).$$

Denoteremo con $G \times_H Y$ la varietà quoziente di $G \times Y$ per l'azione di H , che è usualmente chiamata *prodotto fibrato*. È ben noto che G opera su $G \times_H Y$ a destra e che la proiezione naturale $p: G \times_H Y \rightarrow G/H$ è una fibrazione con fibra Y .

Abbiamo allora la seguente:

PROPOSIZIONE 1.5. *Se S è una fetta G_p -invariante centrata in p , esiste un intorno U_p di p , un intorno $\mathcal{V}$ dell'identità in G ed un diffeomorfismo $\mathcal{V}$ -equivariante*

$$\varphi: U_p \rightarrow G \times_{G_p} S .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia U_p un aperto diffeomorfo a $\mathcal{U}(p) \times S$ come osservato precedentemente e sia $\varphi': \mathcal{U}(p) \times S \rightarrow G \times_{G_p} S$ il diffeomorfismo

$$\varphi'(gG_p, q) = [(g, p)] .$$

Dal momento che il differenziale φ'_* in (p, p) è di rango massimo, si può supporre U_p diffeomorficamente immerso in $G \times_{G_p} S$. Il resto della dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore. $\square$

Il seguente corollario è di notevole importanza e verrà spesso utilizzato in seguito.

COROLLARIO 1.6. *Per ogni $m \in M$ esiste un intorno G -stabile U_m di m tale che per ogni $y \in U_m$ il sottogruppo di isotropia G_y è coniugato ad un sottogruppo di G_m .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo come intorno di m l'aperto G -stabile GS , dove S è una G_m -fetta. Se $y \in GS$ con $y = gs$, allora G_y è coniugato a G_s ; inoltre, dalla proprietà (b) della Definizione 1.3, segue che $G_s \subseteq G_m$, da cui la tesi. $\square$

§2. Struttura differenziale delle orbite e proprietà topologiche dello spazio delle orbite.

Tramite il teorema della fetta, dimostrato nella sezione precedente, è ora possibile analizzare con una certa facilità le proprietà topologiche dello spazio delle orbite $\Omega \cong M/G$, in caso di azioni proprie.

Sappiamo inoltre, dalle osservazioni prima della Proposizione 1.5, che esiste una base di aperti per M , ciascuno diffeomorfo al prodotto cartesiano fra una fetta ed un aperto di un'orbita $G(p)$. Pensiamo perciò utile porre a confronto in una stessa sezione la natura differenziale delle orbite, da un lato, e dello spazio delle orbite, dall'altro. Cominciamo con le orbite.

In generale, le orbite $G(m)$ in M non godono di proprietà come quella di essere sottoinsiemi chiusi o sottovarietà propriamente immerse in M . Anzi, la topologia indotta da M su un'orbita $G(m)$ può essere molto lontana da quella delle varietà differenziabili.

Un'esempio fra i più semplici può essere il seguente: si consideri il toro $T^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e un sottogruppo ad un parametro $\exp(tX) = (t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_{n-1} t)_{\text{mod } \mathbb{Z}^n}$ che sia denso in T^n . Se definiamo l'azione Θ di $\mathbb{R}$ su T^n data da

$$\Theta(t, q) = [(t, \alpha_1 t, \dots, \alpha_{n-1} t) + (q_1, \dots, q_n)]_{\text{mod } \mathbb{Z}^n} \quad ,$$

abbiamo che tutte le orbite sono dense in T^n e che nessuna di queste risulta essere, nella topologia indotta, neppure localmente connessa.

Comunque, se per il momento si trascura la topologia indotta, ogni orbita $G(p)$ è rappresentabile come l'immagine di una immersione in M di una varietà omogenea. Infatti, abbiamo la seguente proposizione, la cui dimostrazione procede seguendo esattamente le stesse argomentazioni utilizzate per dimostrare il Teorema I.6.6.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia G un gruppo di Lie che agisce effettivamente su M e sia $H = G_p$ il sottogruppo di isotropia di un punto p e $G(p)$ l'orbita di p . L'applicazione*

$$\iota: G/H \rightarrow M$$

$$\iota(gH) = \Theta(g, p)$$

è una immersione di G/H in M , la cui immagine coincide con $G(p)$.

Com'è noto, una immersione $\varphi: N \rightarrow M$ viene detta *immersione regolare* se φ è un omeomorfismo fra N e $\varphi(N)$, dove su $\varphi(N)$ si considera la topologia indotta da M . In tal caso $\varphi(N)$ è detta una *sottovarietà regolare* di M .

Il seguente teorema fornisce le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'orbita $G(p)$ sia una sottovarietà regolare e quindi identificabile con uno spazio omogeneo anche nella topologia indotta.

TEOREMA 2.2. *Un orbita $G(p)$ è una sottovarietà regolare di M se e solo se è localmente chiusa in M , e cioè se e solo se $G(p)$ è un sottoinsieme relativamente chiuso in un opportuno insieme aperto $E \supset G(p)$.*

DIMOSTRAZIONE. È noto che ogni sottovarietà regolare è necessariamente localmente chiusa.

Viceversa, se $G(p)$ è localmente chiusa, la topologia indotta da M su $G(p)$ è localmente compatta ed è a base numerabile, ed è quindi la topologia di uno spazio di Baire.

Si consideri ora l'applicazione $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \Theta|_{G \times G(p)}$, data dalla restrizione della azione $\Theta: G \times M \rightarrow M$. La dimostrazione è conclusa osservando che θ è una applicazione continua e che, dal momento che le stesse argomentazioni utilizzate per la dimostrazione della Proposizione I.6.6 valgono nelle ipotesi attuali, l'applicazione data dalla Proposizione 2.1

$$\iota: G/H \rightarrow G(p)$$

$$\iota(gH) = \theta(g, p)$$

è un omeomorfismo. $\square$

Segue subito il seguente corollario.

COROLLARIO 2.3. *Se il gruppo G è compatto, tutte le orbite $G(p)$, $p \in M$, sono sottovarietà regolari di M .*

Dalla Proposizione 2.1 e dalle proprietà delle immersioni, si ha che ogni punto m di un'orbita $G(p)$ ammette un intorno U_m tale che la componente connessa $\mathcal{S}_m$ di $G(p) \cap U_m$ passante per m è una sottovarietà regolare ed è una sottovarietà integrale della distribuzione (non necessariamente regolare) data dalle trasformazioni infinitesime di $\mathfrak{G}_\Theta$. È evidente che la dimensione di $\mathcal{S}_m$ coincide con la dimensione di G/G_p ed è chiamata la *dimensione dell'orbita* $G(p)$. Analogamente, verrà detta *codimensione dell'orbita* $G(p)$ la differenza fra la dimensione n di M e dell'orbita $G(m)$.

Continuiamo ora con lo studio del cosiddetto *spazio delle orbite* $\Omega = M/G$, ovvero lo spazio quoziente, le cui classi di equivalenza sono esattamente le orbite per l'azione di G . Nel seguito, indicheremo con π la proiezione $\pi: M \rightarrow M/G = \Omega$.

Come primo passo, consideriamo su Ω la topologia quoziente ed automaticamente l'applicazione π risulta essere continua. Ma π è anche aperta: infatti, se $A \subset M$ è aperto, allora $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} gA$ che è aperto in M . Ne segue che, con la topologia quoziente, Ω è a base numerabile.

Il seguente Lemma dimostra la proprietà di Hausdorff per lo spazio topologico Ω nel caso delle azioni proprie.

LEMMA 2.4. *Se l'azione di G su M è propria, allora lo spazio delle orbite Ω è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che l'insieme

$$R = \{ (x, g(x)) \in M \times M ; x \in M, g \in G \}$$

è chiuso in $M \times M$. Infatti, se $(x_n, g_n(x_n)) \in R$ è una successione convergente ad un punto (x, y) , scegliamo due intorni U_x e U_y di x e y , rispettivamente, in modo che $G(U_x, U_y)$ sia relativamente compatto in G . Definitivamente la successione $\{g_n\}$ appartiene a $G(U_x, U_y)$ e quindi possiede una sottosuccessione convergente, che continueremo a chiamare $\{g_n\}$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$, allora $y = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_n) = g(x)$ e quindi $(x, y) \in R$. $\square$

Come corollario di questo fatto abbiamo che, *se l'azione è propria*, da una parte, tutte le orbite $G(m)$, $m \in M$, sono chiuse, e ogni orbita è una sottovarietà regolare di M ; dall'altra parte, lo spazio delle orbite è uno spazio T_2 .

Vogliamo provare ora il seguente:

LEMMA 2.5. *Se l'azione di G su M è propria, allora lo spazio delle orbite Ω è localmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi(x)$ un punto qualunque di Ω e consideriamo una fetta G -invariante S in M passante per p . Abbiamo subito che $\pi(S)$ è un aperto di Ω perchè GS è aperto in M . Inoltre, se riprendiamo le notazioni della dimostrazione del Teorema 1.4 e ricordiamo che $S = \exp_x(D(r))$, per una palla $D(r)$ in $\mathbb{R}^{n-\dim G/G_x}$, di raggio r sufficientemente piccolo, abbiamo che la chiusura $\overline{S}$ coincide con $\exp_x(\overline{D(r)})$ ed è quindi compatto. Ne segue che $\pi(S)$ fornisce un intorno relativamente compatto di $\pi(x)$ in Ω . $\square$

Essendo Ω di Hausdorff, a base numerabile e localmente compatto, segue immediatamente che

COROLLARIO 2.6. *Se l'azione di G su M è propria, allora lo spazio delle orbite Ω è paracompatto e quindi normale.*

§3. Azioni proprie ed azioni isometriche.

Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà Riemanniana. Abbiamo già visto che il gruppo delle isometrie $I(M, \mathbf{g})$, dotato della topologia compatta aperta, ammette una struttura di gruppo di Lie rispetto alla quale l'applicazione

$$\Theta: I(M, <, >) \times M \rightarrow M$$

$$\Theta(g, m) = g(m)$$

è una azione, secondo la definizione I.1.1. Questa azione risulta essere anche propria. Più precisamente:

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $G \subset I(M, \mathbf{g})$ un sottogruppo chiuso del gruppo delle isometrie. Allora, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Theta: G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, m) &\mapsto (g(m), m) \end{aligned}$$

è un'azione propria.

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che basta provare che $\Phi^{-1}(K \times L)$ è compatto per ogni scelta di compatti K, L di M . Poichè $G \times M$ è metrizzabile, proveremo che $\Phi^{-1}(K \times L)$ è compatto per successioni. Sia pertanto $\{(g_n, m_n)\} \subset \Phi^{-1}(K \times L)$; poichè L è compatto, possiamo supporre che la successione $\{m_n\}$ sia convergente ad un punto $m_o \in L$ e proviamo che la successione $\{g_n(m_o)\}$ è convergente; per fare ciò possiamo affidarci alla stessa tecnica usata in un certo punto della dimostrazione del Lemma II.4.6: si dimostra prima che la successione è di Cauchy e poi che appartiene definitivamente ad un compatto di M , ottenendo così la sua convergenza.

Si ricordi ora che un classico risultato sulle isometrie di uno spazio metrico compatto (vedi Lemma 3 in [KoNo], vol I, p. 47) afferma che se $\{g_n\}$ è una successione di isometrie tali che $\{g_n(a)\}$ converge per un punto $a \in M$ allora esiste una sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ convergente su tutti i punti $m \in M$. Dal Lemma II.2.5, segue allora che $\{g_{n_k}\}$ converge uniformemente sui compatti ad una isometria e da questo la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE 3.2. Si noti che se il gruppo G non è chiuso in $I(M, \mathbf{g})$, allora l'azione non è necessariamente propria. Si consideri, ad esempio, la varietà $M = GL(2, \mathbb{C})$ munita di una metrica invariante a sinistra. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il gruppo $\mathbb{Z}$ ammette una azione Θ_α su M del tipo

$$\Theta_\alpha(k, A) = A \cdot \begin{pmatrix} e^{i2\pi k\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi k\alpha} \end{pmatrix}.$$

Ogni azione Θ_α è isometrica, ma non ammette orbite chiuse se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ed in tal caso non è propria. In effetti, la realizzazione di $\mathbb{Z}$ come sottogruppo di isometrie di $GL(2, \mathbb{C})$ è chiusa se e solo se $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Dimostriamo ora il seguente teorema (vedi [Ale2], [Pal1]):

TEOREMA 3.3. *Sia G un gruppo di Lie che agisce propriamente su M e sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto dato da aperti U_α invarianti per l'azione di G . Esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$ (ovvero con $\text{supp } \varphi_j \subset U_{\alpha(j)}$ per una opportuna corrispondenza $j \mapsto \alpha(j)$) consistente di funzioni G -invarianti e tali che gli insiemi*

$$W_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi(\{\varphi_i \equiv 1\}) \subset M/G$$

sono compatti.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $\Omega = M/G$ è paracompatto e localmente compatto, possiamo, a meno di raffinamenti, supporre che il ricoprimento $\mathcal{U}$ sia localmente finito e dato da aperti del tipo $\pi^{-1}(V_\alpha)$ con V_α relativamente compatti in Ω . Usando il fatto che π è aperta e surgettiva, esistono compatti $K_\alpha \subset M$ tali che $\pi(K_\alpha) = \overline{V}_\alpha$ e degli intorni relativamente compatti L_α di K_α . Prendiamo ora degli aperti $\{W_\alpha\}$ in Ω tali che $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$: esistono perché Ω è normale.

Poniamo allora $U'_\alpha = \pi^{-1}(V_\alpha) \cap L_\alpha$ e $W'_\alpha = \pi^{-1}(W_\alpha) \cap K_\alpha$. Si osservi che $\overline{W'_\alpha} \subset U'_\alpha$ è compatto e che esistono funzioni continue f_α lisce, non negative con $\text{supp } f_\alpha \subset U'_\alpha$ e che valgono identicamente 1 su $\overline{W'_\alpha}$. Per ogni indice α , possiamo costruire una funzione f_α^* che sia G -invariante come segue: per $x \in G(\text{supp } f_\alpha)$

$$f_\alpha^*(x) = \int_G f_\alpha(gx) d\mu(g),$$

dove μ è una misura invariante a sinistra su G . Tale definizione ha senso in quanto il supporto F_α di f_α è compatto e $G(\{x\}, F_\alpha)$ ha chiusura compatta in G , grazie all'ipotesi di azione propria.

Abbiamo allora che $\pi^{-1}(W_\alpha) \subset \text{supp } f_\alpha^* \subset U_\alpha$ con $U_\alpha = G(U'_\alpha)$ e, poichè $\{\pi^{-1}(W_\alpha)\}$ è un ricoprimento di M e $\{U_\alpha\}$ è localmente finito, le funzioni $\varphi_\alpha = f_\alpha^* / \sum_\alpha f_\alpha^*$ forniscono la partizione desiderata. $\square$

Il teorema precedente, di carattere alquanto tecnico, permette di dimostrare facilmente il seguente risultato, che caratterizza completamente le azioni proprie.

TEOREMA 3.4. *Se G agisce propriamente su M , esiste una metrica Riemanniana su M che sia G -invariante. Tale metrica può essere scelta completa.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $m \in M$, indichiamo con S_m la G_m -fetta, la cui esistenza è garantita dal Teorema 1.4. È chiaro che $\{GS_m\}_{m \in M}$ fornisce un ricoprimento aperto di M dato da aperti G -invarianti. Vogliamo ora costruire una metrica Riemanniana G -invariante su ogni aperto GS_m . Sia V la restrizione del fibrato tangente TM alla sottovarietà S_m e ricordiamo che il gruppo compatto G_m agisce su S_m ; possiamo allora costruire una metrica Riemanniana $h^{(m)}$ lungo le fibre di V che sia G_m invariante. Se prendiamo un punto $gs \in GS_m$ e due vettori tangenti $u, v \in T_{gs}M$, possiamo porre

$$k^{(m)}(u, v) = h^{(m)}(g_*^{-1}(u), g_*^{-1}(v)).$$

La definizione di $k^{(m)}$ non dipende dalla scelta di $g \in G$: infatti, se $gs = g_1 s_1$ per qualche $g_1 \in G, s_1 \in S_m$, allora per la proprietà (b) delle fette, $g_1^{-1}g \in G_p$ e, poichè $h^{(m)}$ è G_p -invariante, la metrica $k^{(m)}$ è ben definita su GS_m e G -invariante.

Per il Teorema 3.3, possiamo trovare una partizione dell'unità $\{\varphi_\alpha\}$ subordinata al ricoprimento $\{GS_m\}_{m \in M}$ e la metrica $\mathbf{g} = \sum_\alpha \varphi_\alpha \cdot k^{(m(\alpha))}$ è la metrica Riemanniana voluta.

Vogliamo ora provare che possiamo scegliere $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ di classe C^∞ e G -invariante tale che $f^2 \cdot \mathbf{g}$ risulti completa.

Vediamo quali sono le condizioni su f perchè $f^2 \cdot \mathbf{g}$ risulti completa, seguendo l'approccio di Nomizu e Ozeki ([NoOz]). Per ogni $x \in M$ indichiamo con $r(x)$ l'estremo superiore dei numeri positivi r tali che la palla

$$B(x, r) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$$

sia relativamente compatta, dove abbiamo denotato con d la distanza indotta dalla metrica $\mathbf{g}$. Si osservi che se risultasse $r(x_o) = \infty$ per qualche punto x_o , allora la varietà M risulterebbe essere compatta e conseguentemente la metrica $\mathbf{g}$ risulterebbe essere di già completa. Possiamo così supporre che $r(x)$ assuma un valore finito per ogni $x \in M$. È poi chiaro che per ogni coppia di punti x e y in M , se $y \in B(x, r(x))$, allora $r(y) \geq r(x) + d(x, y)$. Questo implica che

$$|r(x) - r(y)| \leq d(x, y) \quad . \quad (3.1)$$

A questo punto, affermiamo che la metrica $f^2 \cdot \mathbf{g}$ è completa se la funzione f soddisfa la condizione

$$f(x) \geq \frac{1}{r(x)} \quad (3.2)$$

per ogni $x \in M$. Per dimostrare questa affermazione, basta far vedere che, se d' denota la distanza indotta da $f^2 \cdot \mathbf{g}$, per ogni $x \in M$ risulta che la palla $B'(x, 1/3) = \{y \in M; d'(x, y) < 1/3\}$ è contenuta in $B(x, r(x)/2)$ e quindi è relativamente compatta. Scegliamo allora un punto $y \in M$ con $d(x, y) \geq r(x)/2$ e prendiamo una qualunque curva differenziabile a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. La lunghezza L di γ rispetto alla metrica $\mathbf{g}$ è data da

$$L = \int_a^b \mathbf{g}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right) dt \quad .$$

Se valutiamo ora la lunghezza L' di γ rispetto alla metrica $f^2 \cdot \mathbf{g}$, abbiamo, per il teorema del valor medio,

$$L' = \int_a^b f(\gamma(t)) g\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right) dt = f(\gamma(c)) L,$$

per qualche $c \in (a, b)$. Ne segue che se f soddisfa la condizione (3.2) abbiamo che

$$L' \geq \frac{L}{r(\gamma(c))}.$$

Inoltre, per la (3.1), $r(\gamma(c)) \leq r(x) + d(x, r(\gamma(c))) \leq r(x) + L$ e si ha perciò che

$$L' \geq L/(r(x) + L) \quad .$$

Infine, poichè $r(x) \leq 2L$, abbiamo che $L' \geq 1/3$ e quindi $d'(x, y) \geq 1/3$, come volevasi dimostrare.

In conclusione, ci siamo ricondotti a dover costruire una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ che sia liscia, G -invariante e tale che $f(x) \geq r(x)^{-1}$ per ogni $x \in M$. Dal Teorema 3.3, prendiamo un ricoprimento di aperti U_α G -invarianti e sia $\{h_i\}$ una corrispondente partizione dell'unità di funzioni G -invarianti e con $h_i(x) = 1$ per ogni $x \in \pi^{-1}(\overline{W}_i)$, con $\overline{W}_i$ compatto in Ω . Siano poi

$$r_i = \inf\{r(x) : x \in \pi^{-1}(\overline{W}_i)\} \quad .$$

Essendo la funzione $r(x)$ G -invariante e strettamente positiva, si ha che r_i è strettamente positiva perché $\overline{W}_i$ è compatto. Ne deriva che la funzione

$$f(x) = \sum_{x \in \text{supp } h_i} \frac{h_i}{r_i}$$

soddisfa alle proprietà richieste e questo conclude la dimostrazione. $\square$

§4. Intorni Tubolari e Tubi Lineari.

Sia G un gruppo di Lie che agisce propriamente su una varietà M ; abbiamo visto che possiamo sempre costruire una metrica Riemanniana $\mathbf{g}$ completa su M che sia G -invariante. L'esistenza di tale metrica G -invariante permette di considerare per ogni orbita $F = G(m)$, $m \in M$, (che sappiamo essere una sottovarietà chiusa) il corrispondente fibrato normale $N(F)$, ovvero il fibrato su F definito come

$$N(F) = \bigcup_{y \in M} N_y(F)$$

$$N_y(F) = (T_y F)^\perp = \{v \in T_y M : \mathbf{g}(v, T_y F) = 0\} \quad .$$

In questo paragrafo, vogliamo mostrare come questo fibrato normale $N(F)$ sia di fatto una G -varietà e che l'azione di G su $N(F)$ sia equivalente all'azione di G su un opportuno intorno dell'orbita F considerata.

Si è detto che il gruppo G agisce in modo naturale su $N(F)$. Infatti, per ogni $g \in G$, è possibile definire l'azione $\hat{g}$ di g su $N(F)$ come segue:

$$\hat{g}(v) \stackrel{\text{def}}{=} g_*|_{\pi(v)}(v). \quad (4.1)$$

dove $\pi: N(F) \rightarrow F$ è la proiezione di fibrato. È chiaro che ogni $\hat{g}$ è un diffeomorfismo di $N(F)$, che manda fibre in fibre e tale che la metrica $\mathbf{g}$ lungo le fibre di $N(F)$ è mantenuta invariante da ogni $\hat{g}$. Inoltre, poichè $(M, \mathbf{g})$ è completa, possiamo considerare l'applicazione

$$\text{Exp}: N(F) \rightarrow M$$

$$v \mapsto \text{exp}_{\pi(v)}(v) \quad .$$

Segue immediatamente dalle definizioni che, per ogni $g \in G$,

$$g \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \hat{g}. \quad (4.2)$$

Prendiamo ora un punto $m \in F$ e si considerino i differenziali $\text{Exp}_{m*}|_{T_m(F)}$ e $\text{Exp}_{m*}|_{N(F)_m}$. Dal momento che sono entrambi l'identità nel punto m , esiste un intorno $U_m \subset N(F)$ tale che Exp sia un diffeomorfismo di U_m su un aperto di M contenente m .

Prendiamo ora un numero reale $r > 0$ tale che l'insieme

$$B_r = \{v \in N(F)_m; \quad \mathbf{g}(v, v) < r^2\}$$

sia contenuto in U_m e definiamo l'insieme A_r

$$A_r = \{v \in N(F) ; \quad \mathbf{g}_{\pi(v)}(v, v) < r^2\} \quad .$$

In primo luogo, è chiaro che A_r è G invariante, dal momento che

$$A_r = G \cdot B_r = \bigcup_{g \in G} \hat{g} \cdot B_r \quad .$$

In secondo luogo, abbiamo anche che $Exp|_{A_r}$ è un'immersione. Per dimostrarlo, consideriamo un qualunque $v \in A_r$ e sia $g \in G$ tale che $g(\pi(v)) = m$. Segue allora dalla (4.2) che

$$g_* \circ Exp_{v*} = Exp_{\hat{g}(v)*} \circ \hat{g}_*|_v. \quad (4.3)$$

D'altra parte $\hat{g}(v) \in B_r \subset U_m$ e poichè Exp_{w*} è invertibile in ogni punto w di U_m , segue che il lato destro della (4.3) rappresenta una applicazione invertibile e che quindi anche Exp_{v*} è invertibile.

Vogliamo ora provare che esiste un valore di r sufficientemente piccolo, tale per cui Exp_{A_r} risulti essere un diffeomorfismo sull'immagine (aperta) in M . Avendo già visto che $Exp|_{A_r}$ è un diffeomorfismo locale sull'immagine, basta provare che è iniettiva.

Supponiamo, per assurdo, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'applicazione $Exp|_{A_{1/n}}$ non sia iniettiva. Esisterebbero allora due successioni di punti $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ tali che

$$v_n \neq w_n \in A_{1/n}$$

e

$$Exp(v_n) = Exp(w_n)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scegliendo una successione $g_n \in G$ tale che $g_n(\pi(v_n)) = m$, possiamo sempre supporre che tutti i v_n appartengono ad $N(F)_m$ e che quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Exp(v_n) = m = \lim_{n \rightarrow \infty} Exp(w_n)$$

Sia ora d la distanza indotta dalla metrica $\mathbf{g}$ e osserviamo che, se poniamo $y_n = \pi(w_n)$,

$$d(y_n, Exp(w_n)) = d(y_n, exp_{y_n}(w_n)) \leq \frac{1}{n}.$$

Possiamo ora scegliere un $\delta > 0$ tale che l'insieme

$$C = \{v \in N(F); \quad d(m, \pi(v)) < \delta, \quad \mathbf{g}(v, v) < \delta^2\}$$

sia interamente contenuto in U_m ; poichè

$$d(m, y_n) \leq d(m, Exp(w_n)) + d(y_n, Exp(w_n))$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(m, y_n) = 0,$$

e che quindi, definitivamente, la successione $\{w_n\}$ è contenuta in C . D'altra parte Exp è iniettiva su U_m e poichè anche la successione $\{v_n\}$ appartiene definitivamente a U_m , otteniamo che per n sufficientemente grandi $v_n = w_n$: contraddizione.

Abbiamo così dimostrato l'esistenza di un numero reale r tale che $Exp|_{A_r}$ sia un diffeomorfismo fra A_r e l'immagine $\mathfrak{T}(F) = Exp(A_r)$. L'insieme $\mathfrak{T}(F)$ è dunque un'intorno aperto G -invariante di F : lo chiameremo un *intorno tubolare dell'orbita* $F = G(m)$ o, più semplicemente, *tubo*.

Un'essenziale proprietà di ogni intorno tubolare $\mathfrak{T}(F) = Exp(A_r)$ è che risulta sempre essere G -equivalente ad $N(F)$. Basta infatti considerare l'applicazione $\psi : N(F) \rightarrow A_r$ data da

$$\psi(v) = \frac{rv}{1 + \mathbf{g}(v, v)^{1/2}} \quad .$$

Se si pone $\Phi_F = Exp \circ \psi : N(F) \rightarrow M$, abbiamo che Φ_F è un diffeomorfismo G -equivariante fra $N(F)$ e $\mathfrak{T}(F)$, che realizza la loro equivalenza.

Abbiamo quindi la possibilità di descrivere l'azione di G su $\mathfrak{T}(F)$ riducendosi a studiare la corrispondente azione su $N(F)$.

Infine, si osservi che, per ogni punto $y \in F$, la (4.1) definisce un'azione del gruppo compatto G_y su $N_y(F)$, detta in generale *rappresentazione lineare di "slice"*. Fissato un punto $m_o \in F$, ricordando la definizione di prodotto fibrato (vedi §1.) è facile controllare che, se si pone $Y = N_{m_o}(F)$, l'applicazione

$$\iota : G \times_{G_m} Y \rightarrow N(F)$$

$$\iota([(g, v)]) = \hat{g}(v),$$

è un diffeomorfismo G -equivariante.

Possiamo riassumere questo risultato nel seguente enunciato, comunemente noto come Teorema del Tubo.

TEOREMA 4.1. *Se l'azione di G su M è propria, per ogni $m \in M$, esiste un intorno $\mathfrak{T}(F)$ dell'orbita $F = G(m)$ ed un diffeomorfismo*

$$\Psi : G \times_{G_m} Y \rightarrow \mathfrak{T}(F)$$

(con $Y = N_m(F)$) che è G -equivariante.

Nel seguito chiameremo la coppia $(G \times_{G_m} Y, \Psi)$ *tubo lineare* intorno all'orbita F .

§5. Tipi di orbite.

DEFINIZIONE 5.1. Consideriamo un'azione propria di un gruppo di Lie G su M e indichiamo con $\mathcal{T}_G$ l'insieme delle classi di coniugio dei sottogruppi compatti di G , ovvero le classi di equivalenza date dalla relazione fra sottogruppi compatti

$$H \sim H' \Leftrightarrow H = gHg^{-1} \quad g \in G \quad .$$

Per ogni punto $m \in M$, chiameremo il *tipo d'orbita* di m la classe di equivalenza $[G_m] \in \mathcal{T}_G$ del sottogruppo di isotropia G_m . Infine indicheremo con $\mathcal{T}_M$ il sottoinsieme di $\mathcal{T}_G$ costituito da tutti i tipi d'orbita dei punti di M .

È chiaro che due punti della stessa orbita hanno sempre lo stesso tipo d'orbita, mentre è un facile esercizio verificare che due punti x, y appartenenti a due orbite distinte hanno lo stesso tipo d'orbita se e solo se esiste un diffeomorfismo G -equivariante fra le due orbite

$$\phi : G(x) \cong G/G_x \rightarrow G(y) \cong G/G_y \quad .$$

Per ogni $t \in \mathcal{T}_M$, denoteremo con $M_{(t)}$ l'insieme dei punti di M il cui tipo d'orbita è t . È chiaro che $M_{(t)}$ è un sottoinsieme di M G -invariante.

Richiamiamo ora alcune proprietà dell'insieme $\mathcal{T}_G$. Come prima cosa, si osservi che è possibile munire $\mathcal{T}_G$ di una relazione d'ordine parziale nel modo seguente: per ogni coppia $t, t' \in \mathcal{T}$, poniamo

$$t \preceq t' \quad \text{se e solo se esiste} \quad H \in t, \quad H' \in t' \quad \text{tali che} \quad H' \subseteq H.$$

La verifica che " $\preceq$ " è una relazione che soddisfa le proprietà riflessiva e transitiva è ovvia. Per affermare che è un'ordine parziale bisogna dimostrare che vale anche la proprietà antisimmetrica, e cioè che se $t \preceq t'$ e $t' \preceq t$, allora $t = t'$. Ciò è contenuto nel seguente Lemma.

LEMMA 5.1. *Sia H un sottogruppo compatto di G e sia $g \in G$ tale che $gHg^{-1} \subseteq H$. Allora $H = gHg^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'automorfismo τ_g di G dato dall'operazione di coniugio per l'elemento g : poichè τ_g trasforma H in sè, l'isomorfismo lineare $d\tau_g|_e$ trasforma l'algebra di Lie di H in sè e quindi τ_g trasforma la componente connessa dell'identità H° in se stessa.

Ne segue anche che τ_g trasforma ogni componente connessa di H su un'altra componente connessa di H e questo significa che se C denota l'insieme delle componenti di H , τ_g induce un'applicazione iniettiva di C in sè. Essendo H compatto, C è un insieme finito e quindi τ_g , come applicazione iniettiva di C in sè, è anche necessariamente surgettiva. Segue dunque che $\tau_g(H) = H$. $\square$

Affermiamo che la relazione $\preceq$ gode della proprietà che una qualunque catena

$$\dots t_q \preceq t_{q+1} \preceq t_{q+2} \preceq \dots$$

di elementi di $\mathcal{T}_G$ è *stazionaria*, ovvero esiste un intero $N \in \mathbb{Z}$ tale che $t_n = t_{n+1}$ per ogni intero $n \geq N$. Infatti, ad ogni catena corrisponde una successione decrescente di sottogruppi compatti $\{H_n\}$, le cui algebre di Lie hanno dimensione non crescente. Quindi per n grande $H_n^o = H_{n+1}^o$ e poichè, per gli stessi interi, anche la successione degli indici $(H_n : H_n^o)$ è non crescente, la successione $\{H_n\}$ è necessariamente stazionaria, così come pure la catena.

Da questa proprietà segue che sia l'insieme $\mathcal{T}_G$ che l'insieme $\mathcal{T}_M$ dei tipi d'orbita possiedono almeno un elemento massimale. Vedremo in seguito il significato geometrico per un elemento $\tau \in \mathcal{T}_M$ di essere massimale e proveremo, tra l'altro, che esiste sempre in $\mathcal{T}_M$ un unico elemento massimale, che rappresenta il più *grande* elemento di $\mathcal{T}_M$.

OSSERVAZIONE 5.2. È un facile esercizio verificare che, date due orbite $G(m)$, $G(m')$ con tipi t e t' rispettivamente, condizione necessaria e sufficiente affinché sia $t \preceq t'$ è che esista una submersione G -equivariante $\phi: G(m') \rightarrow G(m)$.

Dal Corollario 1.7, segue immediatamente la seguente importante

PROPOSIZIONE 5.3. *L'applicazione che a ciascun punto di M associa il tipo d'orbita, possiede la seguente proprietà di semicontinuità: se $m \in M$ ha tipo d'orbita t , esiste un intorno aperto G -invariante U_m di m tale che ogni punto di U abbia tipo d'orbita $\succeq t$.*

Veniamo ora al principale risultato di questa sezione.

TEOREMA 5.4. *Supponiamo che lo spazio delle orbite $\Omega = M/G$ sia connesso. Allora l'insieme $\mathcal{T}_M$ possiede un unico elemento massimo τ . Inoltre l'insieme $M_{(\tau)}$ è aperto e denso in M e $M_{(\tau)}/G$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il ricordare che $\mathcal{T}_M$ possiede almeno un elemento massimale τ e che $M_{(\tau)}$ è aperto per la Proposizione 5.3.

Dimostreremo l'asserto per induzione sulla dimensione di M . Il caso $\dim M = 0$ è banalmente verificato. Inseriamo a questo punto il seguente lemma.

LEMMA 5.5. *Supponiamo che il Teorema 5.4 sia valido per ogni dimensione strettamente minore di $n = \dim M$ e sia $A \subset M_{(\tau)}$ un insieme G -invariante aperto e chiuso nella topologia di $M_{(\tau)}$. Allora A è denso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in A$ e consideriamo il tubo lineare $T = (G \times_{G_x} V, \Psi)$ attorno all'orbita $G(x)$, indicando con $\mathfrak{T}$ la sottovarietà $\Psi(G \times_{G_x} V)$. Identifichiamo lo spazio vettoriale V con $T_x(G(x))^\perp$ ed il punto x con il punto $[(e, 0)]$ di $G \times_{G_x} V$. Per dimostrare che A è denso in M è sufficiente dimostrare che $A \cap \mathfrak{T}$ è denso in $\mathfrak{T}$ per ogni $x \in A$. Non c'è dunque alcuna perdita di generalità se, per comodità, sostituiamo tutta la varietà M con il tubo $\mathfrak{T}$. Distinguiamo ora due casi:

(i) $H = G_x$ opera banalmente su V : in tale caso $\mathfrak{T} \cong G/H \times V$ e $M_{(\tau)}/G = \mathfrak{T}/G \cong V$, che è connesso; inoltre A/G è aperto e chiuso in $\mathfrak{T}/G$ e quindi $A/G = \mathfrak{T}/G$. Poichè A è G -invariante, $A = \mathfrak{T}$.

(ii) $H = G_x$ opera in modo non banale su V . In tal caso consideriamo la sfera unitaria S in V e notiamo che S/H è connesso (se $\dim S \geq 1$ è ovvio; se $\dim S = 0$, S è costituita da due punti, ma H opera in modo non banale e quindi S/H è dato da un sol punto). Prendiamo ora $Y = \Psi(G \times_H S)$, che è una sottovarietà di M G -invariante, chiusa in M , di codimensione 1 e tale che il quoziente $Y/G \cong S/H$ sia connesso. Per l'ipotesi induttiva, esiste un unico tipo di orbita θ , che sia massimo nell'insieme dei tipi d'orbite $\mathcal{T}_Y$ su Y e tale che $Y_{(\theta)}$ sia un aperto denso in Y con $Y_{(\theta)}/G$ connesso.

Consideriamo ora l'azione di $\mathbb{R}^+$ su $M = \mathfrak{T}$ indotta dall'omotetia definita su $G \times V$:

$$(g, v) \mapsto (g, \lambda v)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Notiamo che due punti di $M = \mathfrak{T}$ che si corrispondono per una trasformazione di questo tipo hanno lo stesso tipo d'orbita. Perciò $M_{(\theta)}$ contiene $\mathbb{R}^+ Y_{(\theta)}$ che è un aperto denso di $M = \mathfrak{T}$. Poichè sappiamo già che $M_{(\tau)}$ è aperto, abbiamo che $M_{(\tau)}$ interseca $M_{(\theta)}$ e quindi $\theta = \tau$. Ne segue che $M_{(\tau)}$ è denso in M .

Notiamo ora che $M_{(\tau)}/G$ contiene come aperto denso l'insieme $(\mathbb{R}^+ Y_{(\theta)})/G$, il quale, essendo omeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times (Y_{(\theta)}/G)$, è connesso. Allora anche $M_{(\tau)}/G$ è connesso avente come sottoinsieme A/G , il quale è per ipotesi aperto e chiuso in $M_{(\tau)}/G$. Pertanto $A = M_{(\tau)}$ ed è quindi denso in M . $\square$

Dal Lemma 5.5 segue immediatamente che $M_{(\tau)}$ è denso in M . Per dimostrare poi che $M_{(\tau)}/G$ è connesso, consideriamone un qualunque sottoinsieme aperto e chiuso $\tilde{A}$ e sia $A = \pi^{-1}(\tilde{A})$. Per il Lemma 5.5, la chiusura di A coincide con tutto M e quindi $A = M_{(\tau)}$; ne segue che $M_{(\tau)}/G$ è connesso.

Infine, poichè $M_{(\tau)}$ è denso, per la Proposizione 5.3, l'elemento τ è un unico massimo in $\mathcal{T}_M$. $\square$

§6. Orbite regolari, singolari ed eccezionali.

Poniamo ora la seguente

DEFINIZIONE 6.1. Un punto $x \in M$ il cui tipo d'orbita è l'elemento massimo τ dato dal Teorema 5.4, è chiamato *punto regolare o principale* e la sua orbita una *orbita regolare o principale*. L'insieme aperto dei punti regolari è denotato con M_{reg} e un punto che non sia regolare è detto *singolare*.

È chiaro che un'orbita regolare ha dimensione massima possibile d ; chiameremo la codimensione $k = \dim M - d$ la *coomogeneità* dell'azione di G su M , indicata con $\text{chm}(M, G)$.

Se x e y sono due punti, uno regolare e l'altro singolare, G_x è coniugato ad un sottogruppo H di G_y e quindi l'applicazione naturale $p : G(x) = G/G_x \rightarrow G/H = G(y)$ è una fibrazione con fibra G_y/H . Se l'orbita di un punto singolare y ha dimensione d , si dice che il punto y è *singolare eccezionale*: in tal caso, la proiezione suddetta p è un rivestimento finito.

OSSERVAZIONE 6.2. Nel caso delle azioni proprie, dire che la coomogeneità è nulla corrisponde ad affermare che l'azione è transitiva se M è connessa. Infatti, G agisce come gruppo di isometrie per una metrica Riemanniana e la sottovarietà aperta $M_{(\tau)}$, essendo omogenea, è completa e pertanto anche chiusa in M ; ne segue che coincide con M .

Se però l'azione non è propria, ciò non è più vero, ovvero esistono azioni (non complete) con un'orbita aperta densa (per il caso di azioni con orbite aperte dense su varietà complesse, si veda e.g. [HuSn]).

Un importante criterio per la verifica della regolarità di un punto è fornita dalla seguente

PROPOSIZIONE 6.3. *Un punto $x \in M$ è regolare se e solo se la rappresentazione lineare di "slice" di G_x su $V = T_x G(x)^\perp$ è banale. Inoltre se l'azione di G è effettiva, l'azione di G su $G(x)$ è effettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se x è un punto regolare e se $(G \times_{G_x} V, \Psi)$ è il tubo lineare attorno a $G(x)$, prendiamo un punto $z \in V$ (dove abbiamo identificato come al solito $z = [(e, z)]$): il sottogruppo di isotropia G_z coincide con $\{h \in G_x; h(z) = z\}$ e, poichè il tipo d'orbita di x è massimo, $G_z = G_x$, ovvero G_x fissa ogni punto di V .

Viceversa, se G_x fissa V , prendiamo un punto $z \in M_{\text{reg}} \cap \Psi(G \times_{G_x} V)$. Non c'è perdita di generalità nell'assumere $z \in V$. Ma allora $G_x = G_z$ e quindi x ha lo stesso tipo d'orbita di z .

Inoltre, se $h \in G$ agisce banalmente su $G(x)$, allora $h \in G_x$ e $h_*|_x$ è l'identità su $T_x G(x)$. Per quanto appena dimostrato, $h_*|_x$ agisce banalmente anche su $T_x G(x)^\perp$ e quindi ha rappresentazione lineare di isotropia banale. Ne segue che h è l'identità (vedi §I.6.3). $\square$

Vediamo ora degli esempi di azioni e dei corrispondenti tipi di orbite.

ESEMPIO 6.4. Per l'azione standard di $O(n)$ su $\mathbb{R}^n$, tutte le orbite, tranne l'origine, sono regolari.

ESEMPIO 6.5. Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ con il rivestimento $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$. Il gruppo $SO(n)$ agisce sulla sfera come il gruppo delle rotazioni attorno ad un asse fissato l (poniamo ad esempio l'asse dato dalla retta $l = \{x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0\}$) ed induce naturalmente un'azione su $\mathbb{RP}^n \cong S^n / \{x \mapsto -x\}$. Tale azione su $\mathbb{RP}^n$ è di coomogeneità uno ed il sottogruppo di isotropia principale (ovvero di un punto regolare) è isomorfo a $SO(n-1)$. Essa ammette il punto $p(1, 0, \dots, 0)$ come unico punto fisso, che è dunque un'orbita singolare non eccezionale, mentre l'orbita $p(S^n \cap \langle l \rangle^\perp)$ costituisce un'orbita singolare eccezionale, in quanto, per ogni punto di quell'orbita, il sottogruppo di isotropia è isomorfo a $S(\{\pm Id\} \times O(n-1))$.

ESEMPIO 6.6. Sia G un gruppo di Lie connesso e compatto e si consideri l'azione di G su se stesso tramite coniugio. Si ha che per ogni $x \in G$, $G_x = Z(x)$, dove $Z(x)$ è il centralizzatore di x in G . Dalla teoria classica dei gruppi di Lie, si ha che x è regolare se e solo se $Z(x)$ è un sottogruppo abeliano massimale, ovvero un *toro massimale*. Ne segue che la $chm(G, G)$ coincide con il rango del gruppo (cioè la dimensione di un toro massimale).

Possono anche esistere orbite eccezionali: ad esempio se $G = SO(3)$, l'orbita per il punto $\text{diag}(1, -1, -1)$ è singolare e isomorfa a $\mathbb{RP}^2$ (un risultato di Dynkin e Onishchik ([DyOn]) afferma che esistono orbite eccezionali se e solo se il sottogruppo dei commutatori non è semplicemente connesso). Torneremo con maggiori dettagli su tale esempio nel Capitolo IV.

Si noti invece che l'azione di G sulla sua algebra data dalla rappresentazione aggiunta non possiede mai orbite eccezionali (vedi e.g. [Oni]).

Studiamo ora in maggior dettaglio le proprietà locali degli insiemi $M_{(\tau)}$. Lo strumento fondamentale è costituito dal Teorema del Tubo e fissiamo qui alcune notazioni. Per ogni punto $p \in M$, porremo $V = T_p(G(p))^\perp$ e useremo il simbolo $\mathfrak{T}$ per l'intorno tubolare

$$\mathfrak{T} = \Psi(G \times_{G_p} V)$$

corrispondente al tubo lineare $(G \times_{G_p} V, \Psi)$.

Si osservi che, per costruzione, la sottovarietà

$$\{e\} \times_{G_p} V \subset G \times_{G_p} V$$

è una fetta G_p -invariante centrata in $[(e, 0)]$, mentre $S = \Psi(\{e\} \times_{G_p} V)$ è una fetta centrata in p . Per semplicità, useremo spesso il simbolo V per $\{e\} \times_{G_p} V$.

Si consideri ora il fatto che per ogni $m \in \mathfrak{T}$, esiste un elemento $m' \in G(m) \cap S$ tale che $G_{m'}$ coincide con il sottogruppo di $H = G_p$ degli elementi che fissano $v = \Psi^{-1}(m') \in V$.

Se quindi indichiamo con $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}, G}$ l'insieme dei tipi d'orbita dell'azione di G su $\mathfrak{T}$ e con $\mathcal{T}_{V, H}$ l'insieme dei tipi d'orbita di H su V , abbiamo subito il seguente

LEMMA 6.7. *L'applicazione*

$$\iota_{\mathfrak{T}}: \mathcal{T}_{\mathfrak{T},G} \rightarrow \mathcal{T}_{V,H}$$

$$\iota_{\mathfrak{T}}([G_m]) = [G_{\Psi(-1)(m')}] ,$$

dove $m' \in G(m) \cap S$, è biiettiva.

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Il fatto che l'azione di H su V è lineare permette di descrivere la struttura dell'insieme dei punti di $\mathfrak{T}$ con un assegnato tipo d'orbita.

COROLLARIO 6.8. *Se per ogni tipo d'orbita $t \in \mathcal{T}_{\mathfrak{T},G}$ indichiamo con*

$$\mathfrak{T}_{(t)} = \{m \in \mathfrak{T} \setminus G(p) : [G_m] = t\}$$

allora $\mathfrak{T}_{(t)}$ è del tipo

$$\mathfrak{T}_{(t)} = \Psi(G(C_t))$$

dove $C_t \subset V$ è un cono privato del vertice.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 6.7, $\mathfrak{T}_{(t)} = \Psi(G(C_t))$ dove $C_t = \{0 \neq v \in V : [G_v] = \iota_{\mathfrak{T}}(t)\}$. Poiché l'azione di H è lineare, l'isotropia in un punto v coincide con quella di λv per ogni $\lambda \neq 0$. $\square$

Dalla corrispondenza fra i tipi d'orbita di $\mathfrak{T}$ e di V possiamo relazionare le codimensioni delle orbite in $\mathfrak{T}$ e in V .

PROPOSIZIONE 6.9. *Per ogni $q \in \mathfrak{T}$ la codimensione di $G(q)$ in M è pari alla codimensione dell'orbita $H(v)$ in V dove $v \in V$ è un qualunque elemento in $\Psi^{-1}(G(q) \cap S)$. In particolare $\text{chm}(M, G) = \text{chm}(V, H)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G , $\mathfrak{h}$ quella di H e sia $\mathfrak{m}$ un sottospazio di $\mathfrak{g}$ complementare ad $\mathfrak{h}$. Per qualunque $X \in \mathfrak{g}$, si indichi con ξ_X la corrispondente trasformazione infinitesima su $G \times_H V$. Si noti che per ogni $v \in V$ ed ogni $X \in \mathfrak{g}$, si ha che $\xi_X|_v = 0$ se e solo se $X \in \mathfrak{h}$. Pertanto, se $\{X_1, \dots, X_m\}$ è una base per $\mathfrak{m}$, le corrispondenti trasformazioni infinitesime $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ sono tali che hanno valutazioni linearmente indipendenti in ogni $v \in V$ e generano un sottospazio complementare a $T_v(H(v))$ in $T_v(G(v))$.

Di conseguenza, per ogni $v \in V$, si ha

$$\dim G(v) = \dim \mathfrak{m} + \dim H(v)$$

e

$$\begin{aligned} \text{codim} G(v) &= \dim G/H + \dim V - \dim G(v) = \\ &= \dim V - \dim H(v) = \text{codim}_V H(v) . \end{aligned} \quad \square$$

I precedenti Corollario 6.8 e Proposizione 6.9 permettono di ottenere il seguente teorema.

TEOREMA 6.10. *Sia $t \in \mathcal{T}_M$ un tipo di orbita singolare. Allora:*

- a) *ogni componente connessa $M_{(t)}^o$ di $M_{(t)}$ è una sottovarietà regolare di M ;*
- b) *se $N \subset G$ è il sottogruppo normale di ineffectività su $M_{(t)}^o$, l'azione di G/N su $M_{(t)}^o$ è propria e di coomogeneità strettamente inferiore a $\text{chm}(M, G)$; tutte le orbite di G in $M_{(t)}$ sono regolari e la proiezione $\pi: M_{(t)} \rightarrow M_{(t)}/G$ è una fibrazione.*

DIMOSTRAZIONE. a) Sia $p \in M_{(t)}^o$ e, come al solito, sia $H = G_p$ e $\mathfrak{T} = \Psi(G \times_H V)$ un intorno tubolare di $G(p)$. Per il Lemma 6.7 e il Corollario 6.8, risulta

$$M_{(t)}^o \cap \mathfrak{T} = \Psi(G(V^H))$$

dove V^H indica il sottospazio dei vettori fissi per l'azione di H . Ne segue che, essendo

$$G(V^H) = G \times_H V^H \cong G/H \times V^H$$

una sottovarietà regolare di $G \times_H V$, $M_{(t)}^o \cap \mathfrak{T}$ è una sottovarietà regolare di $\mathfrak{T}$.

b) Si consideri una metrica Riemanniana G -invariante $\mathbf{g}$ su M . È chiaro che G/N agisce propriamente come gruppo chiuso di isometrie di $M_{(t)}^o$ con orbite tutte dello stesso tipo.

Per quanto riguarda la coomogeneità, da (a) segue che, fissato un intorno tubolare $\mathfrak{T}$, si ha che

$$\Psi^{-1}(M_{(t)}^o \cap \mathfrak{T}) \cong G/H \times V^H$$

e quindi $\text{chm}(M_{(t)}^o, G/N)$ coincide con $\dim V^H$.

Poiché H è compatto, possiamo decomporre $V = V^H \oplus W$ con W sottospazio H -invariante; si noti che, essendo H isotropia di un punto singolare, W non si riduce a $\{0\}$ (vedi Prop. 6.3). Per la Proposizione 6.9, $\text{chm}(M, G) = \text{chm}(V, H)$ e d'altra parte

$$\text{chm}(V, H) \geq \text{chm}(V^H, H) + \text{chm}(W, H) > \text{chm}(V^H, H) = \dim V^H,$$

da cui la tesi. $\square$

Concludiamo questa sezione studiando la possibile cardinalità dell'insieme dei tipi di orbita $\mathcal{T}_M$. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 6.11. *Se G agisce su M propriamente l'insieme $\mathcal{T}_M$ ha cardinalità al più numerabile. In particolare ha cardinalità finita nei seguenti due casi:*

- a) *M/G è compatto;*
- b) *M è uno spazio vettoriale V di dimensione finita su cui G agisce linearmente.*

DIMOSTRAZIONE. Proveremo l'enunciato per induzione sulla dimensione di M . Il caso $\dim M = 0$ è banale e quindi supporremo la Proposizione valida in dimensione $n-1$. Inoltre, poiché la tesi è immediata se G agisce transitivamente, possiamo supporre che $\text{chm}(M, G) \geq 1$.

Per dimostrare che $\mathcal{T}_M$ è numerabile, si osservi che M è ricopribile, per Lindelöf, da una infinità al più numerabile di intorni tubolari $\mathfrak{T}_i$. Si otterrà la tesi se si

prova che all'interno di ciascun $\mathfrak{T}_i$ i tipi d'orbita sono in numero finito. Se $\mathfrak{T}_i = \Psi_i(G \times_{H_i} V_i)$, per ogni $z \in \mathfrak{T}_i$ del tipo $z = [(g, v)]$, $g \in G$, $v \in V$, il sottogruppo G_z è coniugato a G_v , il quale a sua volta è un sottogruppo di H_i . Poichè $\dim V_i < \dim M$, per ipotesi induttiva applicata a (b), segue la tesi.

La dimostrazione della finitezza di $\mathcal{T}_M$ nell'ipotesi (a) avviene osservando che in tal caso M è ricopribile da un numero finito di tubi.

Per dimostrare la finitezza di $\mathcal{T}_M$ nell'ipotesi (b), si osservi che, per linearità, ogni punto diverso dall'origine ha lo stesso tipo d'orbita della sua proiezione centrale sulla sfera unitaria S di M ; per ipotesi induttiva nel caso (a), abbiamo la tesi. $\square$

Un risultato profondo di Mann (vedi [Bre]), afferma che i tipi d'orbita sono in numero finito non appena il gruppo G sia compatto e i gruppi di omologia $H_i(M, \mathbb{Z})$ siano finitamente generati.

OSSERVAZIONE 6.12. Si noti che l'ipotesi di azione propria è essenziale nella dimostrazione della Proposizione 6.11: ad esempio, il gruppo

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

agisce su $\mathbb{R}^3$ in modo lineare e i sottogruppi di isotropia dei punti del tipo $(0, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$, sono tutti normali in G e quindi appartenenti a classi di coniugio differenti. Da questo deriva che l'insieme dei tipi d'orbita di questa azione ha cardinalità più che numerabile.

La finitezza dello spazio dei tipi d'orbita ha importanti conseguenze; concludiamo questa sezione, enunciando un Teorema dovuto a Palais (vedi [Pal1]) che fornisce condizioni affinché un G -spazio ammetta un'immersione G -equivariante in uno spazio euclideo.

TEOREMA 6.13. *Sia G un gruppo lineare e sia M una varietà su cui G agisce propriamente. Se l'insieme dei tipi d'orbita per l'azione di G su M è finito, allora esiste un'immersione $\phi : M \rightarrow E^N$ della varietà in uno spazio euclideo e una rappresentazione lineare $\rho : G \rightarrow GL(E^N)$, tale che $\phi(gx) = \rho(g)(\phi(x))$ per ogni $x \in M$ e $g \in G$.*

Richiamiamo qui il fatto che tale teorema era stato dimostrato precedentemente da Mostow ([Mos]) nel caso in cui G è compatto. Su questa linea, ci si può chiedere quando uno spazio omogeneo G/H Riemanniano ammetta un'immersione isometrica G -equivariante in un opportuno spazio euclideo. La risposta non è sempre positiva: ad esempio nessuno spazio simmetrico di tipo non compatto ammette una immersione del genere. Se però G è compatto, la risposta è affermativa, come provato da Moore ([Moo]).

ESERCIZI 6.14.

1) Dato $G = SO(n)$ con rappresentazione standard ψ_n , si trovi $chm(\mathbb{R}^{2n}, G)$, dove G agisce su $\mathbb{R}^{2n}$ tramite $\psi_n \oplus \psi_n$. In particolare si trovino le orbite regolari.

2) Date due G -varietà M ed N , la varietà $M \times N$ è una G -varietà in modo ovvio. Provare che

$$chm(M \times N, G) \geq chm(M, G) + chm(N, G) .$$

3) Sia $G = SU(3)$ che agisce su $S^7 \subset \mathfrak{su}(3)$ tramite rappresentazione aggiunta. Trovare le orbite regolari e le orbite singolari.

4) Sia $G = SO(3)$ e sia V lo spazio delle matrici simmetriche di ordine 3 a traccia nulla. G opera su V tramite coniugio. Si trovino orbite regolari e singolari per l'azione di G sulla sfera unitaria di V .

5) Sia M una G varietà. L'azione di G si solleva ad un'azione effettiva su TM . Provare che $chm(TM, G) = 1$ se e soltanto se M è uno spazio simmetrico G/H di rango uno. In particolare, trovare le orbite principali di $G = SO(n+1)$ su TS^n .

6) Sia M una G -varietà orientabile. Provare che se $chm(M, G) = 1$ allora le orbite regolari sono orientabili.

7) Sia M una G -varietà Riemanniana. Se H è un sottogruppo di isotropia non principale e N è una componente di $M_{(H)}$, provare che N è una sottovarietà minima.

CAPITOLO IV

SOTTOVARIETÀ TRASVERSALI ALLE ORBITE

§1. Le sezioni di una G -varietà.

In questo capitolo indicheremo con $(M, \mathbf{g})$ una varietà Riemanniana completa, su cui un gruppo di Lie G agisce come gruppo di isometrie e diremo semplicemente che M è una G -varietà Riemanniana. In questo caso, lo spazio delle orbite $\Omega = M/G$ eredita una struttura di spazio metrico (Ω, d^*) , dove, per $p, q \in \Omega$

$$d^*(p, q) = d_{\mathbf{g}}(\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)),$$

$\pi : M \rightarrow \Omega$ essendo la proiezione canonica.

DEFINIZIONE 1.1. Si dice *sezione* di una G -varietà Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ una sottovarietà regolare Σ , connessa e chiusa di M , tale che:

- a) Σ interseca ogni orbita di G ;
- b) per ogni punto $x \in \Sigma$, l'orbita $G(x)$ è ortogonale a Σ .

Dalla definizione stessa, segue subito che, se Σ è una sezione, per ogni $g \in G$, anche la sottovarietà $g(\Sigma)$ è una sezione. Dal momento che $G(\Sigma) = M$, l'esistenza di almeno una sezione Σ implica che è possibile determinare una sezione passante per qualsiasi punto $p \in M$ assegnato. Se esiste almeno una sezione, si dice che M *ammette sezioni*.

Vediamo subito alcuni esempi di G -varietà che ammettono sezioni e altre che non ne ammettono alcuna:

ESEMPIO 1.2. Si consideri il toro $T^2 \cong S^1 \times S^1$ e si indichi con X_1 il campo invariante a destra indotto dall'azione di una copia di S^1 che agisce su T^2 per traslazioni sinistre. Scegliamo ora un'altro campo invariante a destra X_2 , indipendente da X_1 e che generi un gruppo ad un parametro non chiuso. Se ora definiamo una metrica $\mathbf{g}$ in modo che i campi X_1, X_2 risultino una base ortonormale in ogni punto, è chiaro che S^1 agisce isometricamente su T^2 con orbite di codimensione uno, ma *senza* sezioni. Infatti se Σ fosse una sezione, dovrebbe essere contenuta nell'immagine $\exp(tX_2)(p)$ per un qualche $p \in T^2$ e questa curva, per costruzione, non è chiusa (anzi è densa). Questo prova anche che in generale non è vero che azioni di coomogeneità uno ammettono sezioni.

ESEMPIO 1.3. Sia G un gruppo compatto connesso che agisce su se stesso tramite coniugio. Come già visto nell'Esempio III.6.6, l'isotropia G_h ($h \in G$) è il centralizzatore di h e quindi ha dimensione maggiore o uguale al rango di G che è pari a $\text{chm}(G, G)$. Se inoltre dotiamo G di una metrica biinvariante, G agisce isometricamente.

Vogliamo provare che un qualunque toro massimale T fornisce una sezione per tale azione. Infatti T interseca ogni orbita: sia $h \in G$ e sia T' un toro massimale con $h \in T'$; poichè T e T' sono coniugati, esiste $g \in G$ tale che $ghg^{-1} \in T$, ovvero T interseca l'orbita per h . Dobbiamo ora verificare che T è ortogonale ad ogni orbita. Per fare ciò, sia h un elemento qualunque di G e si osservi che per ogni $X \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ l'orbita 1-dimensionale generata dal flusso di X è

$$\exp(tX)h\exp(-tX).$$

Da questa espressione, segue direttamente che lo spazio tangente all'orbita passante per h è generata dai vettori

$$dR_h(X) - dL_h(X),$$

al variare di $X \in \mathfrak{g}$. Si osservi ora che se $h \in T$, lo spazio tangente $T_h T$ è generato dai vettori $dL_h(Y)$, con Y nell'algebra di Lie $\mathfrak{t}$ di T . Perciò, se $(,)$ indica la metrica biinvariante, abbiamo che, per ogni $X \in \mathfrak{g}$

$$(dR_h X - dL_h X, dL_h Y) = (X, dR_{h^{-1}} dL_h Y) - (X, Y) = 0,$$

poichè $Ad(h)(Y) = Y$. In altre parole, $T_h T$ è ortogonale a $T_h(Ad(G)(h))$.

ESEMPIO 1.4. L'esempio precedente è un caso particolare del seguente. Sia $M = G/K$ uno spazio Riemanniano simmetrico. La teoria degli spazi simmetrici è una fra le aree di studio riguardanti gli spazi omogenei, che sia stata più completamente sviluppata e approfondita. Rimandiamo il lettore interessato al famoso testo [Hel] di R. Helgason per una descrizione dettagliata dei fatti principali sugli spazi simmetrici.

Ricordiamo qui solo alcune proprietà, senza darne dimostrazione. Se indichiamo con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ le algebre di Lie di G e K , rispettivamente, $\mathfrak{g}$ possiede un automorfismo involutorio $*$, in corrispondenza del quale esiste la decomposizione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \tag{1.1}$$

dove $\mathfrak{k}$ coincide con l'insieme dei punti fissi $\{X \in \mathfrak{g} : *X = X\}$, mentre $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : *X = -X\}$. Tale decomposizione è $Ad(K)$ -invariante (vedi anche §I.6.2).

Se identifichiamo $\mathfrak{p}$ con lo spazio tangente $T_{eK}G/K$, dalla Prop. I.6.16, ogni metrica Riemanniana G -invariante $\mathfrak{g}$ su M è univocamente associata ad un prodotto scalare definito positivo $Ad(K)$ -invariante su $\mathfrak{p}$ e la corrispondenza è data da $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}|_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, la suddetta identificazione fornisce una equivalenza tra l'azione lineare di isotropia di K su $T_{eK}G/K$ all'azione aggiunta $Ad(K)$ sul sottospazio $\mathfrak{p}$.

Nel caso particolare, in cui il gruppo G è del tipo $G \simeq G' \times G'$ e $K = \{k = (g, g), g \in G'\}$, con G' compatto connesso, si ha che G/K è uno spazio simmetrico compatto e, se si considera il diffeomorfismo $\phi: G' \rightarrow G/K$, $\phi(g) = (g, g^{-1}) \bmod K$, si ha che l'azione aggiunta di $K \simeq G'$ su G/K è G' -equivalente all'azione aggiunta di G' su sè stesso. Questo significa che l'azione dell'Esempio 1.3 è sempre interpretabile come un caso particolare dell'azione del sottogruppo di isotropia su di uno spazio simmetrico.

Ora, l'esistenza di sezioni per l'azione dell'esempio precedente è in realtà una conseguenza del seguente fatto: *l'azione aggiunta del sottogruppo di isotropia di uno spazio simmetrico ammette sempre sezioni*. La dimostrazione si basa sui seguenti punti.

Si dice *sistema triplo di Lie* un qualunque sottospazio $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che

$$X, Y, Z \in \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{s}$$

e si dimostra che esiste una corrispondenza biunivoca fra le sottovarietà totalmente geodetiche $S \subset M$ passanti per eK e i sistemi tripli $\mathfrak{s}$ contenuti in $\mathfrak{p}$: è facile intuire che la corrispondenza è data dalla mappa

$$S \mapsto T_{eK}S = \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{p} \simeq T_{eK}M.$$

Risulta anche che S è una sottovarietà piatta se e solo se il corrispondente sistema triplo $\mathfrak{s}$ è una sottoalgebra abeliana.

Si dice *rango di uno spazio simmetrico* la dimensione massima di una sottovarietà piatta totalmente geodetica. Per quanto già osservato, questo corrisponde a dire che il rango di M è la dimensione di una qualunque sottoalgebra abeliana massimale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, detta *sottoalgebra di Cartan della coppia* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Nel nostro caso, una qualunque sottovarietà piatta S , totalmente geodetica e passante per eK , costituisce una sezione per l'azione di K su G/K . Infatti, in analogia con le proprietà dei tori massimali dei gruppi compatti, per ogni punto $x \in M$ esiste sempre almeno una sottovarietà piatta totalmente geodetica S' (corrispondente ad un'algebra di Cartan $\mathfrak{a}'$) che contiene x e $x_o = eK$; per di più, se indichiamo con $\mathfrak{a}$ l'algebra di Cartan corrispondente ad S , si può dimostrare che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}'$ sono coniugate tramite l'azione di un elemento di K ; questo prova che anche le corrispondenti sottovarietà S ed S' sono ottenibili l'una dall'altra per l'azione di un elemento $k \in K$ e che quindi S interseca ogni orbita.

Per controllare poi che S interseca tutte le orbite ortogonalmente, è possibile dimostrare che questo succede se e solo se $\mathfrak{a} \simeq T_{x_o}S$ interseca ortogonalmente le orbite per l'azione aggiunta K su $\mathfrak{p}$. D'altra parte, basandosi sulle proprietà delle rappresentazioni dei gruppi compatti, si ha che, per ogni $A \in \mathfrak{p}$, si ottiene sempre che $\mathfrak{p}$ ammette una decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{k}, A] \oplus \mathfrak{p}_A,$$

dove $\mathfrak{p}_A = \{X \in \mathfrak{p} : [X, A] = 0\}$. Dal momento che $[\mathfrak{k}, A]$ coincide con lo spazio tangente all'orbita in $\mathfrak{p}$ del punto A , si deduce che, per ogni punto $A \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_A$, $\mathfrak{a}$ è ortogonale all'orbita per A .

Concludiamo la discussione di questo esempio con la seguente importante osservazione: dimostreremo fra poco (Teorema 1.9 (c)) che se una G varietà Riemanniana M ammette sezioni, allora anche l'azione lineare di isotropia G_p su $T_p M$, per ogni punto $p \in M$, ammette sezioni. Segue allora subito che, per ogni spazio simmetrico $M = G/K$, l'azione aggiunta di K sul sottospazio $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ della decomposizione (1.1) ammette sempre sezioni. Tali azioni aggiunte costituiscono una classe estremamente rappresentativa nella famiglia delle azioni su spazi lineari che ammettono sezioni, come vedremo in §4.

Iniziamo dunque lo studio delle proprietà delle sezioni. La prima è la seguente che fornisce la loro dimensione.

PROPOSIZIONE 1.5. *Se Σ è una sezione e k è la coomogeneità dell'azione, allora $k = \dim \Sigma$. Inoltre se $p \in \Sigma$ è un punto regolare, esiste un intorno $U(p)$ tale che $\pi : U(p) \cap \Sigma \rightarrow \Omega$ è un omeomorfismo sull'immagine.*

DIMOSTRAZIONE. Sia p un punto regolare di Σ e sia $\mathfrak{T}$ un intorno tubolare di $G(p)$. Per costruzione, $\mathfrak{T}$ è diffeomorfo a $G(p) \times B_r$ dove B_r è una palla di raggio r in $T_p G(p)^\perp$. Se indichiamo con π la naturale proiezione di $\mathfrak{T}$ su B_r , segue subito dalle definizioni che $\pi(\Sigma \cap \mathfrak{T}) = B_r$. D'altra parte sappiamo che la proiezione π è liscia, $\Sigma \cap \mathfrak{T}$ è una sottovarietà regolare di $\mathfrak{T}$ e che $\dim T_p \Sigma \leq k$ per definizione di sezione. Allora, per il Teorema di Sard, segue facilmente che $\pi(\Sigma \cap \mathfrak{T}) = B_r$ se e soltanto se $\dim \Sigma = \dim B_r = k$. Da qui segue anche che, per r sufficientemente piccolo, π è un diffeomorfismo fra la componente connessa $\mathcal{C}$ di $\Sigma \cap \mathfrak{T}$ contenente p e B_r e che quindi, per ogni aperto $U(p) \subset \mathfrak{T}$ tale che $U(p) \cap \Sigma = \mathcal{C} \cap U(p)$,

$$G(U) \simeq U \times G .$$

Di questo fatto, il secondo enunciato è una diretta conseguenza. $\square$

Continuiamo descrivendo alcune proprietà della natura locale delle sezioni.

TEOREMA 1.6. *Sia Σ una sezione di una G -varietà Riemanniana (M, g) di coomogeneità k . Allora:*

- a) l'insieme Σ_{reg} dei punti regolari di Σ è aperto e denso in Σ ;*
- b) Σ è totalmente geodetica;*
- c) per ogni $p \in \Sigma$ esiste un intorno U_p di p in M tale che, se S indica la fetta G_p -invariante, abbiamo*

$$\Sigma \cap U \subseteq S \cap U .$$

DIMOSTRAZIONE. a) Indichiamo con Σ_{sing} l'insieme chiuso dei punti singolari di Σ . Abbiamo che

$$\Sigma_{\text{sing}} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_M} \Sigma \cap M_{(t)} .$$

Poiché Σ e ciascun $M_{(t)}$ sono sottovarietà regolari, ciascuna intersezione $\Sigma \cap M_{(t)}$ contiene un aperto A_t che è una sottovarietà regolare trasversa alle orbite di G in

$M_{(t)}$. Ne segue che $\dim A_t \leq \text{chm}(F, G)$ e per il Teorema III.6.10 (b), si ha che $\dim A_t < \text{chm}(M, G) = \dim \Sigma$. Poichè per la Proposizione III.6.2, la cardinalità di $\mathcal{T}_M$ è al più numerabile, abbiamo che $\Sigma_{\text{reg}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\text{sing}}$ è un aperto denso.

b) Dal punto (a), è sufficiente provare che l'insieme Σ_{reg} è totalmente geodetico. Dalla definizione segue che per ogni $p \in \Sigma_{\text{reg}}$ si ha

$$T_p \Sigma_{\text{reg}} = T_p(G(p))^\perp .$$

Fissato $p \in \Sigma_{\text{reg}}$, si consideri una geodetica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ e vettore tangente iniziale in $T_p \Sigma$. Se X è un qualunque campo di Killing indotto dall'azione di G , abbiamo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(\gamma'(t), X) = \mathbf{g}(\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), X) + \mathbf{g}(\gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} X) = 0 ,$$

poichè γ è una geodetica e X è un campo di Killing, ovvero in ogni punto $x \in M$ l'endomorfismo $\nabla X|_x$ è antisimmetrico. Nel punto p abbiamo che $\mathbf{g}(\gamma'(0), X|_p) = 0$ e quindi $\mathbf{g}(\gamma'(t), X) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; dall'arbitrarietà di X , segue che $\gamma'(t)$ è ortogonale alle orbite e quindi, per t sufficientemente vicini a 0, $\gamma(t)$ giace in Σ .

c) Segue immediatamente dalla costruzione della fetta (vedi Teorema III.1.4) e dal fatto che Σ è totalmente geodetica. $\square$

Nel Teorema 1.6 abbiamo visto che, localmente, una sezione è contenuta in una fetta. Vogliamo ora studiare meglio la rappresentazione di "slice" e relazionarla all'esistenza di sezioni.

TEOREMA 1.7. *Sia Σ una sezione e sia $p \in \Sigma$ con $V_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} T_p \Sigma \subset V = T_p(G(p))^\perp$. Allora la rappresentazione lineare di "slice" di $H = G_p$ su V ammette sezioni e V_Σ è una sezione per questa azione.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo innanzitutto che V_Σ interseca ortogonalmente ogni orbita $H(v)$ con $v \in V$. Si consideri $z \in V_\Sigma$ e la corrispondente geodetica $z(t) = \exp_p(tz)$ in M . Dal momento che Σ è totalmente geodetica ed è una sezione, abbiamo che per ogni t

$$T_{z(t)} \Sigma \subseteq (T_{z(t)}(G(z(t))))^\perp .$$

Si consideri su $T_{z(t)} V$ la metrica indotta

$$\tilde{\mathbf{g}}_t = \exp_p^*|_{tz} \mathbf{g} .$$

Ovviamente risulta che, rispetto a tale metrica,

$$T_{tz} V_\Sigma \subseteq (T_{tz}(H(tz)))^\perp .$$

Trattandosi di spazi lineari, possiamo identificare

$$T_z V \cong T_{tz} V \cong V, \quad T_z V_\Sigma \cong T_{tz} V_\Sigma \cong V_\Sigma$$

e indurre su $T_z V$ la metrica $\tilde{\mathbf{g}}_t$. D'altra parte, poichè l'azione di H è lineare, il sottospazio tangente all'orbita $H(tz)$ in tz coincide con il sottospazio tangente all'orbita $H(z)$ in z per ogni $t \neq 0$. Possiamo allora affermare che per $t \neq 0$,

$$T_z V_\Sigma \subseteq (T_z(H(z)))^\perp$$

rispetto alla metrica $\tilde{\mathbf{g}}_t$. Dal momento che $\tilde{\mathbf{g}}_t$ tende uniformemente alla metrica $\mathbf{g}|_V$ per $t \rightarrow 0$, abbiamo che

$$T_z V_\Sigma \subseteq (T_z(H(z)))^\perp$$

rispetto alla metrica $\mathbf{g}|_V$.

A questo punto, resta da dimostrare che V_Σ interseca tutte le orbite. Osserviamo dapprima che V_Σ contiene almeno un punto regolare. D'altra parte, poiché Σ_{reg} è denso in Σ , deve esistere un $v \in V_\Sigma$ tale che $\exp_p(v)$ sia regolare in $\Sigma \cap \mathfrak{T}$. Di conseguenza, per il Lemma III.6.7, v corrisponde al tipo di orbita massimale di H ed è quindi regolare. Per la Proposizione III.6.9, la codimensione dell'orbita $H(v)$ è pari a $\text{chm}(M, G)$ e quindi

$$\dim V_\Sigma = \text{chm}(M, G) = \dim \mathfrak{h}(v)^\perp ,$$

dove $\mathfrak{h}$ è l'algebra di Lie di H .

Ne segue che

$$V_\Sigma = \{w \in V ; \langle w, \mathfrak{h}v \rangle = 0\} .$$

Fissato $w \in V$, consideriamo l'applicazione

$$H \ni h \mapsto \langle hw, v \rangle .$$

Dalla compattezza di H segue che tale applicazione possiede un punto critico h_o e quindi

$$0 = \langle \mathfrak{h}h_o w, v \rangle = \langle h_o w, \mathfrak{h}v \rangle ,$$

cioè $h_o w \in V_\Sigma$. questo prova che V_Σ interseca tutte le orbite. $\square$

Il precedente risultato ci permette di studiare tutte le sezioni che passano per uno stesso punto $p \in M$. Abbiamo il seguente

TEOREMA 1.8. *Sia $(M, \mathbf{g})$ una G -varietà che ammette sezioni e sia $p \in M$. Allora*

a) se p è regolare, esiste una ed una sola sezione Σ passante per p e il sottogruppo di isotropia $H = G_p$ fissa ogni punto di Σ , ovvero $\Sigma \subseteq M^H$;

b) se p è singolare, l'isotropia H agisce transitivamente sull'insieme delle sezioni passanti per p ; se Σ passa per p e se indichiamo con K l'isotropia G_q di un punto regolare $q \in \Sigma$ e con H_Σ il sottogruppo di H che trasforma Σ in sè, allora

$$H_\Sigma \subseteq N_H(K) ,$$

dove $N_H(K)$ è il normalizzatore di K in H .

L'insieme delle sezioni per p è parametrizzato da H/H_Σ .

DIMOSTRAZIONE. a) Dal fatto che Σ è totalmente geodetica e che $\dim \Sigma = \dim T_p(G(p))^\perp$, segue subito che può passare una sola sezione per p . Poiché p è regolare, la rappresentazione di "slice" di H è banale per la Proposizione III.6.3 e quindi ogni elemento $h \in H$ trasforma σ in sè e fissa ogni punto di Σ in un opportuno intorno di p . Dal momento che Σ è completa, la trasformazione $h \in H$ fissa ogni punto di Σ .

b) Siano Σ_1 e Σ_2 due sezioni passanti per p ed indichiamo con V_1 e V_2 i due spazi tangenti $V_{\Sigma_1}, V_{\Sigma_2}$ rispettivamente. Sia $v \in V_{\Sigma_1}$ un punto regolare; dal Teorema 1.7 sappiamo che esiste $h \in H$ con $h(v) \in V_{\Sigma_2}$. Dal punto (a) segue che $h(V_{\Sigma_1})$ è l'unica sezione per $h(v)$ e quindi $h(V_{\Sigma_1}) = V_{\Sigma_2}$. Ne segue che Σ_2 e $h(\Sigma_1)$ sono due sezioni con lo stesso spazio tangente in p ; essendo le sezioni complete e totalmente geodetiche, si ha $h(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

Per concludere la dimostrazione, si osservi che da (a), per ogni $k \in K$ e per ogni $h \in H_\Sigma$, si ha $h(q) \in \Sigma$ e quindi $kh(q) = h(q)$ e quindi $h \in N_H(K)$. L'ultima parte dell'enunciato è immediata. $\square$

Indichiamo con G_Σ il sottogruppo di tutti gli elementi $g \in G$ che trasformano Σ in se stessa. Se $x \in \Sigma$ è un punto regolare e $K = G_x$ è il corrispondente gruppo di isotropia, è evidente, dalla dimostrazione del Teorema 1.8 (b), che

$$K \subseteq G_\Sigma \subseteq N_G(K)$$

e che K coincide con l'insieme degli elementi di G_Σ che agiscono banalmente su Σ . Dunque è naturale introdurre la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9. Il gruppo dei laterali

$$W_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} G_\Sigma/K \subseteq N_G(K)/K$$

è detto *gruppo di Weyl* della sezione Σ .

Il gruppo W_Σ è isomorfo al gruppo delle trasformazioni indotte dagli elementi di G_Σ su Σ ; si noti inoltre che il gruppo G agisce transitivamente sull'insieme di tutte le sezioni, che risulta quindi parametrizzato da G/G_Σ , dove Σ è una sezione fissata. Si noti inoltre che

$$W_{g\Sigma} = gW_\Sigma g^{-1},$$

per ogni $g \in G$ e per ogni sezione Σ .

ESEMPIO 1.10. Se G è un gruppo compatto connesso che agisce su stesso tramite coniugio e se T è un toro massimale, che, come abbiamo visto nell'Esempio 1.3, costituisce una sezione Σ , allora $G_\Sigma = N_G(T)$ e in questo caso $K = C(T) = T$, ovvero il gruppo di Weyl della sezione coincide con il classico gruppo di Weyl $N(T)/T$ (vedi [Ada]).

Vediamo ora alcune proprietà generali del gruppo di Weyl:

TEOREMA 1.11. *Sia Σ una sezione di una G -varietà Riemanniana M .*

a) *Il gruppo di Weyl W_Σ è un gruppo discreto di isometrie di M ed agisce liberamente sulla sottovarietà Σ_{reg} dei punti regolari di Σ . Se G è compatto, W_Σ è finito.*

b) *Lo spazio delle orbite $\Omega = M/G$ può essere identificato con Σ/W_Σ , ovvero se $p \in \Sigma$, si ha*

$$G(p) \cap \Sigma = W_\Sigma(p).$$

La proiezione $\pi : \Sigma \rightarrow \Omega$ (che è quindi aperta) induce un rivestimento $\pi : \Sigma_{\text{reg}} \rightarrow \Omega_{\text{reg}}$.

c) *Per ogni punto $p \in \Sigma$ il gruppo di Weyl della sezione $T_p\Sigma$ in $T_pG(p)^\perp$ è dato da*

$$W_{T_p\Sigma} = \{\phi \in W_\Sigma; \phi(p) = p\}.$$

d) *L'anello $C^\infty(M)^G$ delle funzioni C^∞ che sono G -invarianti su M , è isomorfo all'anello delle funzioni C^∞ su Σ che sono W_Σ -invarianti; tale isomorfismo è fornito dalla restrizione su Σ*

$$f \mapsto f|_\Sigma.$$

DIMOSTRAZIONE. a) Fissiamo un punto $x \in \Sigma$ regolare e ricordiamo che un intorno U di x in Σ è una fetta. D'altra parte, se $g \in G_\Sigma$ è sufficientemente vicino all'identità, l'elemento gx appartiene a U ; ne segue che, poichè ogni fetta di un punto regolare interseca ogni orbita in un sol punto, $gx = x$, ovvero $g \in K$ e $[g] = e \in W_\Sigma$. Ciò prova che W_Σ è discreto; nel caso in cui G sia compatto, G_Σ è chiuso e quindi W_Σ , essendo discreto e compatto, è finito.

b) Supponiamo che $x \in \Sigma$ e $g \in G$ con $gx \in \Sigma$. Ne segue che $gx \in g\Sigma \cap \Sigma$ e pertanto, per il Teorema 1.8 (b), esiste $h \in G_{gx}$ tale che $hg\Sigma = \Sigma$. Allora, $hg \in G_\Sigma$ e $gx = hgx \in G_\Sigma x = W_\Sigma x$. In altre parole, ogni orbita $G(x) \in \Omega$ è univocamente determinata dalla corrispondente orbita $G_\Sigma(x) \in \Sigma/W_\Sigma$.

Le altre parti dell'enunciato seguono direttamente da (a).

c) Si noti che $(G_p)_{T_p\Sigma} = G_p \cap G_\Sigma$; inoltre se $g \in G_p$ lascia ogni punto di $T_p\Sigma$ fisso, allora g lascia ogni punto di Σ fisso e cioè $W_{T_p\Sigma} \subset (W_\Sigma)_p$. Viceversa se $\phi \in W_\Sigma$ con $\phi(p) = p$, allora la trasformazione data da ϕ trasforma, a livello di spazio tangente, il sottospazio $T_p\Sigma$ in sè e quindi $(W_\Sigma)_p = W_{T_p\Sigma}$.

d) Si tratta della generalizzazione del classico teorema di Chevalley e per la dimostrazione, che qui accenneremo solamente, facciamo riferimento a [PaTe]. Innanzitutto, osserviamo che, se indichiamo con $C^o(M)^G$ e $C^o(\Sigma)^W$ gli anelli delle funzioni continue su M e su Σ , che siano G e W_Σ invarianti rispettivamente, l'applicazione $r : C^o(M)^G \rightarrow C^o(\Sigma)^W$ data dalla restrizione è un isomorfismo per il punto (b). Per dimostrare che $r(C^\infty(M)^G)$ coincide con $C^\infty(\Sigma)^W$, dobbiamo provare che se $F \in C^o(M)^G$ è tale che $f = r(F)$ sia C^∞ su Σ , allora $F \in C^\infty(M)$.

Sia x un punto di M e sia S una fetta centrata in x ; poichè $S \times G(x)$ è diffeomorfo ad un intorno di x in M , per provare che F è C^∞ , è sufficiente provare che $\phi = F|_S$ è liscia. Questo discende da due teoremi profondi, uno di Chevalley ed uno di Schwartz e per una trattazione dettagliata di questo punto, rimandiamo a [PaTe] e [Sch]. $\square$

OSSERVAZIONE 1.12. Questo ultimo teorema permette di illustrare con maggiore precisione l'utilità delle sezioni (quando esistono) nel risolvere problemi di vario tipo. Una prima applicazione è fornita immediatamente dal punto d), in quanto è decisamente più facile individuare l'anello delle funzioni W_Σ -invarianti (W_Σ è discreto se non finito!) su Σ di quanto non sia caratterizzare l'anello $C^\infty(M)^G$.

Il punto b) suggerisce un'ulteriore applicazione, usata spesso in analisi, per affrontare in modo alternativo il classico *metodo della riduzione delle variabili* o *metodo della coomogeneità*. In genere, quando si studiano oggetti G -invarianti su M (ad esempio sistemi di equazioni differenziali con soluzioni G -invarianti), si parla di "metodo della riduzione delle variabili" quando si sostituisce al problema originario quello analogo definito sullo spazio delle orbite $\Omega = M/G$. Tale spazio tuttavia ha quasi sempre nulla di più che una struttura di spazio stratificato e comunque, spesso, non costituisce una vera e propria varietà differenziale. Se però l'azione su M ammette sezioni, si può tentare di risolvere l'analogo problema su una sezione Σ , cercando, tra le varie soluzioni, quelle che siano W_Σ -invarianti. Un classico esempio che permette di confrontare questi due approcci è fornito dalle tecniche usate per la ricerca delle funzioni armoniche u su $\mathbb{R}^n$, tali cioè che risolvano $\Delta u = 0$. Se si cercano le soluzioni che siano $O(n)$ -invarianti, il metodo della riduzione delle variabili porta a considerare $f(x) = u(\|x\|)$ e a ridursi a risolvere l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \frac{\partial f}{\partial r}) = 0, \quad (1.2)$$

sulla semiretta $[0, +\infty) \simeq \mathbb{R}^n/O(n)$, con opportune condizioni al contorno in 0. Se però si osserva che una qualunque retta per l'origine rappresenta una sezione, possiamo determinare le funzioni armoniche $O(n)$ -invarianti anche considerando le soluzioni di (1.2) *su tutto* $\mathbb{R}$, che risultano invarianti per le riflessioni rispetto all'origine.

Concludiamo questo paragrafo osservando il seguente fatto. Per definizione, una varietà trasversale a tutte le orbite ed ortogonale ad esse è una sezione se e solo se è anche chiusa in M ; l'ipotesi di chiusura è una richiesta di tipo tecnico, senza la quale, in situazioni di coomogeneità arbitrarie, le proprietà enunciate nei Teoremi 1.8 e 1.11 non sono dimostrabili. Se però M è una G -varietà Riemanniana completa e di coomogeneità uno, esistono sempre varietà totalmente geodetiche (in realtà: curve geodetiche) che sono trasversali e ortogonali a tutte le orbite. Diamo qui di seguito la definizione di tali geodetiche.

DEFINIZIONE 1.13. Sia $(M, \mathbf{g})$ una G -varietà Riemanniana completa di coomogeneità uno. Una geodetica completa γ è detta *geodetica normale* se interseca ogni orbita ortogonalmente.

Non è difficile verificare che una qualunque geodetica completa, passante per un punto regolare x e che in quel punto sia perpendicolare a $T_x G(x)$, deve intersecare tutte le orbite di M e sempre ortogonalmente. Infatti esiste il seguente utile Lemma di validità generale

LEMMA 1.14. *Sia Γ una sottovarietà chiusa, totalmente geodetica e sia $x \in \Gamma$ un punto regolare. Se $T_x\Gamma = T_x(Gx)^\perp$, allora Γ interseca ogni orbita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $y \in M$ e sia $\sigma : [0, L] \rightarrow M$ una geodetica con $\sigma(0) = x$ e $L = d(x, Gy)$. Poichè G agisce isometricamente, si ha che σ è una geodetica minimizzante da Gx a Gy e quindi $\sigma'(0) = v$ è ortogonale a $T_x(Gx)$ e quindi appartiene a $T_x\Gamma$. Essendo Γ totalmente geodetica, abbiamo che $\sigma(t)$ giace su Γ per ogni t , in particolare per $t = L$; pertanto $\Gamma \cap Gy$ non è vuoto. $\square$

Possiamo allora dire che ogni G -varietà Riemanniana di coomogeneità uno ammette almeno una geodetica normale, la quale costituirà però una sezione se e solo se la sua immagine in M è anche chiusa.

Tuttavia, a causa del fatto che le geodetiche normali non sono altro che varietà trasversali di dimensione uno, l'ipotesi di chiusura non risulta più essenziale e la definizione di gruppo di Weyl ed i Teoremi 1.8 e 1.11 possono essere estesi a tutte le varietà di coomogeneità uno complete, se si sostituisce in tutti gli enunciati la parola *sezione* con *geodetica normale* (vedi [Ale1]). Lasciamo la dimostrazione di questo fatto come esercizio al lettore.

§2. Criteri per l'esistenza di sezioni.

In questo paragrafo vogliamo dare alcune condizioni che assicurino l'esistenza di sezioni per una G -varietà Riemanniana M .

Iniziamo subito osservando che sull'aperto M_{reg} dei punti regolari di M possiamo definire una distribuzione regolare $\mathcal{H}$ come segue: per $p \in M_{\text{reg}}$ sia

$$\mathcal{H}_p = (T_p G(p))^\perp.$$

La dimensione di $\mathcal{H}$ coincide chiaramente con la coomogeneità di G e segue che, se esistono sezioni, allora la distribuzione $\mathcal{H}$ è integrabile ed una sezione fornisce una varietà integrale di $\mathcal{H}$. Ovviamente, il viceversa non è valido, in quanto la distribuzione $\mathcal{H}$ è definita solo nell'aperto dei punti regolari ed inoltre, anche nel caso in cui sia definita ovunque, una sottovarietà integrale non necessariamente è una sottovarietà chiusa. Infatti abbiamo già visto un esempio (Esempio 1.2), in cui la semplice integrabilità della distribuzione $\mathcal{H}$ non implica l'esistenza di sezioni.

Da queste prime osservazioni, segue allora che una possibile strategia per determinare condizioni necessarie e equivalenti all'esistenza di sezioni sia quella di cercare condizioni equivalenti all'integrabilità di $\mathcal{H}$, da un lato, e di ulteriori criteri che implicino poi l'estendibilità delle varietà integrali di $\mathcal{H}$ in M_{reg} a sottovarietà chiuse e trasversali a tutte le orbite di M , dall'altro.

Cominciamo allora con lo studio dell'integrabilità di $\mathcal{H}$.

Fissiamo un punto regolare $p \in M_{\text{reg}}$ e consideriamo il gruppo di isotropia G_p con algebra $\mathfrak{g}_p$; poichè G_p è compatto, possiamo considerare una decomposizione riduttiva (vedi §1.6.3) dell'algebra $\mathfrak{g}$ di G

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p,$$

dove $\mathfrak{m}_p$ è un sottospazio complementare a $\mathfrak{g}_p$ e $Ad(G_p)$ -invariante. Identificando l'algebra $\mathfrak{g}$ con l'algebra delle trasformazioni infinitesime corrispondenti, è evidente che $\mathfrak{m}_p$ descrive un sottospazio di campi di Killing X , i cui valori X_p in p generano l'intero spazio tangente all'orbita $G(p)$. Se $X \in \mathfrak{g}$ è un qualunque campo di Killing in $\mathfrak{g}$, possiamo considerare l'endomorfismo $A_X : T_p M \rightarrow T_p M$ dato da

$$A_X(Y) = \nabla_Y X|_p,$$

dove ∇ indica la connessione di Levi-Civita di una qualunque metrica Riemanniana G -invariante; è ben noto che l'endomorfismo A_X risulta antisimmetrico (cfr. [KoNo], vol I).

Consideriamo allora la seguente condizione:

$$A_X(\mathcal{H}_p) \subset T_p G(p), \text{ per ogni } X \in \mathfrak{m}_p \quad (\text{C})$$

e dimostriamo il seguente teorema, dovuto a Szenthe ([Sze]), che mette in relazione l'esistenza di sezioni con la condizione (C).

TEOREMA 2.1. *La distribuzione $\mathcal{H}$ è integrabile se e solo se per ogni punto regolare $p \in M_{\text{reg}}$ e comunque si fissi una decomposizione riduttiva*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p,$$

vale la condizione (C).

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema di Frobenius, la distribuzione $\mathcal{H}$ è integrabile se e solo se è involutiva. Siano U, V due campi su M_{reg} che siano sezioni di $\mathcal{H}$ e sia $X \in \mathfrak{g}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle X, [U, V] \rangle &= \langle X, \nabla_U V - \nabla_V U \rangle = \\ &= U \langle X, V \rangle - \langle \nabla_U X, V \rangle - \{V \langle X, U \rangle - \langle \nabla_V X, U \rangle\} = \\ &= 2 \langle A_X V, U \rangle. \end{aligned}$$

Segue allora che il campo $[U, V]$ è ancora una sezione di $\mathcal{H}$ se e solo se per ogni $X \in \mathfrak{g}$

$$0 = \langle A_X V, U \rangle,$$

e questa condizione è equivalente a (C). $\square$

La dimostrazione del Teorema di Szenthe fornisce in realtà maggiori informazioni. Infatti:

PROPOSIZIONE 2.2. *Se $\mathcal{H}$ è integrabile, ogni sottovarietà integrale massimale Q di $\mathcal{H}$ è totalmente geodetica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in Q \subset M_{\text{reg}}$ e sia $X \in \mathfrak{m}_p$. Per ogni coppia di campi U e V su Q , abbiamo, per il Teorema 2.1, che sia $A_X(U)|_p$ che $A_X(V)|_p$ sono in $T_p(G(p))$ e quindi ortogonali ad $\mathcal{H}$. Perciò,

$$0 = \langle \nabla_U X, V \rangle = U \langle X, V \rangle - \langle X, \nabla_U V \rangle = - \langle X, \nabla_U V \rangle.$$

Per l'arbitrarietà di X , questo dimostra che $\nabla_U V$ è ancora un campo su Q . $\square$

Dalla Proposizione 2.2, segue che se risultasse possibile *incollare* alcune sottovarietà integrali massimali di $\mathcal{H}$ per determinare una sottovarietà S trasversale alle orbite di tutti i punti (regolari e non), questa sottovarietà risulterebbe essere, per continuità, ovunque totalmente geodetica. Vogliamo dimostrare che tale operazione di *incollaggio* è sempre effettuabile e determina sempre una sottovarietà immersa totalmente geodetica, ma non necessariamente regolare.

La costruzione di tale sottovarietà necessita di alcune preliminari definizioni.

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodetica che abbia un segmento contenuto in una sottovarietà integrale Q di $\mathcal{H}$: un qualunque punto di bordo dell'intersezione $Q \cap \gamma([0, 1])$ è detto *punto di bordo per Q* e l'insieme P di tutti i punti di bordo di Q (che ovviamente contiene Q ed è incluso nella chiusura $\overline{Q}$) è detta *sottovarietà integrale massimale chiusa* (brevemente *i.m.c.*).

Se $x \in P$ è un punto interno di Q , si considera come spazio tangente $T_x P$ lo spazio tangente $T_x Q$, mentre se $x \in \partial Q$ è un punto di frontiera, si definisce $T_x P$ con la seguente costruzione. Se $\phi : [0, 1] \rightarrow M$ è una curva liscia tale che $\phi([0, 1)) \subset Q$ e $\phi(1) = x$, si pone $T_x P$ come l'immagine, tramite il trasporto parallelo lungo ϕ , del sottospazio $T_{\phi(0)} Q$; è facile verificare che tale sottospazio non dipende dalla scelta della curva ϕ , poichè Q è totalmente geodetica.

Due sottovarietà i.m.c. P e P' vengono dette *contigue* in un punto x se x è un punto interno di P e $P = P'$, oppure se x è di bordo per entrambe le sottovarietà e $T_x P = T_x P'$. Inoltre, date due sottovarietà i.m.c. P e P' , diremo che P' è *accessibile* da P se esiste una sequenza di sottovarietà i.m.c. $P_0, \dots, P_k$, tale che $P = P_0$, $P' = P_k$ e che, per ogni $0 \leq i \leq k-1$, le varietà P_i e P_{i+1} siano contigue. L'accessibilità è chiaramente una relazione di equivalenza sull'insieme delle sottovarietà i.m.c.. Indichiamo con $\mathcal{S}_P$ la classe di equivalenza di tutte le i.m.c. accessibili a P e sia S_P l'unione delle sottovarietà i.m.c. contenute in $\mathcal{S}_P$. Abbiamo allora il seguente risultato.

TEOREMA 2.3. *Per ogni i.m.c. P , l'insieme S_P è una sottovarietà immersa (ma non necessariamente regolare o chiusa in M), la cui immagine è totalmente geodetica ed intersecante ortogonalmente tutte le orbite.*

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto, vogliamo far vedere che, se x è un punto di bordo di una sottovarietà i.m.c. P , allora esiste un cono $C_{(x,P)} \subset T_x P$ con parte interna non vuota, tale che, per ogni intorno sufficientemente piccolo U di x , si abbia

$$U \cap \overset{\circ}{P} = U \cap \exp_x(C_{(x,P)}) .$$

A questo scopo, si consideri un tubo lineare $\mathfrak{T} = \Psi(G \times_H V)$ dove, come al solito, $V = T_x(G(x))^\perp$ e $H = G_x$. Ogni geodetica $\gamma(t)$ passante per x e perpendicolare a $G(x)$ è immagine secondo Ψ della curva

$$\tilde{\gamma}(t) = tv_o \in V$$

per qualche $v_o \in V$. Ora, se per qualche t_o , il punto $\tilde{\gamma}(t_o)$ è un punto regolare per l'azione di H allora tutti i punti $\tilde{\gamma}(t)$ con $0 < t < t_o$ sono regolari. Di conseguenza anche tutti i punti di $\gamma(t)$ sono regolari (vedi Lemma III.6.7).

Dal momento che P è totalmente geodetica, se $y = \exp(t_o v_o) \in P \cap \exp_x(V)$, anche tutti i punti $\exp(tv_o)$, $0 < t < t_o$ sono punti regolari ed appartenenti a P . Questo significa che l'insieme $C_{(x,P)}$ dei vettori $v \in V$ tali che

$$\exp_x(v) \in \overset{\circ}{P}$$

costituisce un cono $C_{(x,P)}$ di $T_x P \subseteq V \subset T_x G(x)^\perp$. Un immediato confronto di dimensioni, mostra poi che $C_{(x,P)}$ ha necessariamente parte interna non vuota.

Dopo questo risultato, vogliamo ora mostrare che se $P_1, \dots, P_n$ sono tutte e solo le varietà i.m.c. che sono fra loro contigue in un punto x , allora l'unione dei coni

$$C_x = C_{(x,P_1)} \cup \dots \cup C_{(x,P_n)}$$

è un sottoinsieme denso di $\mathcal{Z} \stackrel{\text{def}}{=} T_x P_1 = T_x P_2 = \cdots = T_x P_n$.

Se così non fosse, il complementare $C'_x = \mathcal{Z} \setminus C$ sarebbe un cono con interno non vuoto. Per la proprietà precedentemente dimostrata, esiste allora un cono aperto $W \subset \overset{\circ}{C}'_x \setminus \{x\}$ costituito solo da punti regolari. Ma allora l'esponenziale $\exp_x(W)$ deve essere contenuto in una varietà i.m.c. P_o necessariamente contigua in x a tutte le altre P_i ma distinta da queste e questo è impossibile.

Dal fatto che tutte le i.m.c. sono chiuse, possiamo concludere che, per ogni $x \in S_P$ e $x \in \partial P'$, allora esiste un intorno U di x tale che

$$U \cap \exp_x(T_x P') = U \cap \exp(\overline{C}_x) = U \cap S_P .$$

Lo stesso accade banalmente anche se $x \in S_P$ è punto interno di qualche i.m.c.. Questo conclude la dimostrazione del fatto che S_P è una sottovarietà immersa e totalmente geodetica. Si controlla poi che S interseca tutte le orbite ortogonalmente, osservando che l'insieme delle orbite intersecate in tal modo da S è aperto e denso in $\Omega = M/G$. $\square$

Dai Teoremi 2.1 e 2.3, abbiamo allora che M ammette sezioni se e solo se vale la condizione (C) e se per qualche i.m.c. P , la sottovarietà S_P risulta regolarmente immersa e chiusa. In particolare, abbiamo il seguente utile criterio di esistenza.

COROLLARIO 2.4. *Se vale la condizione (C) ed ogni sottovarietà immersa totalmente geodetica di M è una varietà regolare e chiusa, allora M ammette sezioni.*

Concludiamo questo paragrafo ricordando che, oltre alla condizione (C), altri criteri per dimostrare l'integrabilità di $\mathcal{H}$ possono essere determinati utilizzando il fatto che $\mathcal{H}$ è anche la distribuzione orizzontale per la submersione Riemanniana $\pi: M_{\text{reg}} \rightarrow M_{\text{reg}}/G$. Si possono così ottenere altre condizioni necessarie e sufficienti all'integrabilità, implicate direttamente dai classici risultati della teoria delle submersioni Riemanniane. Rimandiamo il lettore interessato ad [ONe] e [PaTe].

§3. Azioni asistatiche.

Dimostreremo fra breve che, dato un punto regolare p di una G -varietà Riemanniana, la verifica in p della condizione (C) di §4.2, può limitarsi allo studio di quelle trasformazioni infinitesime che sono invarianti per l'azione aggiunta del sottogruppo di isotropia G_p . Seguirà allora che le G -varietà che non ammettono simili trasformazioni infinitesime invarianti, dette *varietà con azione asistatica* soddisfano automaticamente la condizione (C) e quindi rappresentano una classe particolarmente importante di G -varietà. Dedicheremo il resto di questo paragrafo allo studio delle loro proprietà principali, fra cui quella di ammettere *sempre* sezioni, indipendentemente dalla metrica Riemanniana G -invariante considerata.

Cominciamo mostrando che la condizione (C) è in pratica verificata automaticamente da tutti gli elementi di un particolare sottospazio di $\mathfrak{m}_p$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Usando le notazioni dei paragrafi precedenti, sia p un punto regolare di M e si consideri una decomposizione riduttiva dell'algebra $\mathfrak{g}$ di G :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p . \quad (3.1)$$

Allora $A_X(\mathcal{H}_p) \subset T_p(G(p))$ per ogni $X \in [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{m}_p]$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo $Y \in \mathfrak{m}_p$, $Z \in \mathfrak{g}_p$ ed un vettore $U \in \mathcal{H}_p$. Si osservi che, dal momento che per ogni punto regolare q la rappresentazione di isotropia di G_q su $\mathcal{H}_q$ è banale, si può sempre estendere il vettore U ad un campo G -invariante, sempre denotato con U , definito su di un intorno opportuno dell'orbita $G(p)$. Osserviamo ora che se $g \in G_p$, abbiamo

$$\nabla_{dg(Y)} dg(U) = dg(\nabla_Y U),$$

poichè ogni g agisce come un'isometria. Inoltre, se denotiamo con $W^\perp$ la componente di un qualunque vettore tangente $W \in T_p M$ in $\mathcal{H}_p$, abbiamo anche che

$$(\nabla_{dg(Y)} dg(U))^\perp = (dg(\nabla_Y U))^\perp = dg((\nabla_Y U)^\perp) = (\nabla_Y U)^\perp ,$$

dal momento che dg agisce banalmente su $\mathcal{H}_p$. D'altra parte, U è G -invariante e quindi possiamo anche affermare che

$$(\nabla_Y U)^\perp = (\nabla_{dg(Y)} dg(U))^\perp = (\nabla_{dg(Y)} U)^\perp .$$

Se ora scegliamo una curva in G_p del tipo $g_t = \exp(tZ)$, differenziando in t la precedente eguaglianza, otteniamo che

$$(\nabla_{[Z, Y]} U)^\perp = 0 ,$$

il quale, in conseguenza del fatto che $[[Z, Y], U] = 0$, porta ad affermare

$$A_{[Z, Y]} U \in T_p G(p) ,$$

come volevasi dimostrare. $\square$

Ora, se p è un punto regolare con decomposizione riduttiva (3.1), posto per comodità $K = G_p$, è noto che la rappresentazione $Ad(K^o)$ su $\mathfrak{m}_p$ (K^o = componente connessa dell'identità) si decompone in azione sui seguenti fattori irriducibili (vedi [Ada])

$$\mathfrak{m}_p = \mathfrak{m}_o \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_k ,$$

dove $\mathfrak{m}_o$ denota l'insieme dei punti fissi di $Ad(K^o)$, mentre K^o agisce irriducibilmente su ciascun $\mathfrak{m}_i$ per $i = 1, \dots, k$. In particolare, per ogni $1 \leq i \leq k$,

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{m}_i] = \mathfrak{m}_i .$$

Pertanto, grazie al Teorema 2.1 ed al fatto che l'azione aggiunta di K^o è equivalente alla rappresentazione di isotropia di K^o su $T_p G(p)$, otteniamo direttamente il seguente risultato.

TEOREMA 3.2. *La distribuzione $\mathcal{H}$ è integrabile se e solo se, per ogni punto regolare $p \in M^*$, data una qualunque decomposizione riduttiva (3.1) di $\mathfrak{g}_p$,*

$$A_X(\mathcal{H}_p) \subset T_p G(p)$$

per ogni $X \in \mathfrak{m}_p$ invariante per l'azione aggiunta della componente connessa G_p^o dell'isotropia.

In particolare, se per ogni punto regolare p non esiste alcun vettore tangente non nullo in $T_p G(p)$ che sia fissato da G_p^o , allora la distribuzione $\mathcal{H}$ è integrabile.

Il precedente teorema mostra l'utilità di introdurre la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.3. Uno spazio omogeneo G/K (con azione di G propria) è detto *asistatico* se la rappresentazione di isotropia di K non ammette alcun vettore non nullo invariante. Una G -varietà Riemanniana M è detta *asistatica* se esiste un punto regolare $p \in M^*$ tale che $G(p)$ sia una varietà asistatica.

È chiaro che nella definizione precedente, se esiste un punto regolare in cui è soddisfatta la condizione suddetta, allora è soddisfatta in ogni altro punto regolare. Altra osservazione importante è che la condizione di asistaticità su M riguarda unicamente le proprietà algebriche dello spazio omogeneo G/G_p ed è quindi controllabile in modo indipendente dalla conoscenza o meno della metrica Riemanniana G -invariante. Diamo subito alcune condizioni equivalenti all'asistaticità di uno spazio omogeneo.

PROPOSIZIONE 3.4. *Una varietà omogenea $M = G/K$ dotata di una metrica Riemanniana invariante è asistatica se si verifica una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- 1) *la rappresentazione di isotropia di K non ha vettori invarianti non nulli;*
- 2) *non ci sono campi G -invarianti non nulli su G/K ;*

- 3) il gruppo $N_G(K)/K$ è discreto;
 4) due punti distinti sufficientemente vicini hanno stabilizzatori diversi.

DIMOSTRAZIONE. Sia $p = eK \in G/K$. Per provare che (1) e (2) sono equivalenti, basta notare che se $X \in T_p M$ è invariante per la rappresentazione di isotropia, esso può essere esteso (in modo unico) ad un campo G -invariante.

Per provare che (1) e (4) sono equivalenti, osserviamo che esiste un intorno U di p tale che $U \cap M^K = U \cap \exp_p(V)$, dove M^K denota l'insieme dei punti fissi di K e $V = \{v \in T_p M; dg(v) = v, g \in K\}$; infatti basta scegliere $U = \exp_p(D_r)$, dove $D_r = \{v \in T_p M; \|v\| < r\}$ per r sufficientemente piccolo.

Ne segue che se $q \in U \setminus \{p\}$, allora G_q coincide con K se e solo se $q \in M^K \setminus \{p\}$, ovvero se e solo se $V \neq \{0\}$.

Per provare l'equivalenza con il punto (3), consideriamo una decomposizione $Ad(K)$ -invariante dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

dove $\mathfrak{k}$ è l'algebra di K . Se $X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, ovvero se $[X, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, e se indichiamo con X' la sua componente lungo $\mathfrak{m}$, segue che $[X', \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$, ovvero X' centralizza $\mathfrak{k}$. Pertanto se vale (1), $X' = 0$ e questo implica che $N_G(K)/K$ è discreto. Viceversa se vale (3), un qualunque vettore $X \in \mathfrak{m}$ che sia $Ad(K)$ -invariante deve essere nullo perchè elemento di $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. $\square$

Ecco dunque le principali proprietà delle G -varietà asistatiche, fra cui, come accennato, l'esistenza di sezioni (vedi [AlAl2]).

TEOREMA 3.5. *Sia M una G -varietà asistatica con metrica Riemanniana G -invariante $\mathfrak{g}$. Sia poi K lo stabilizzatore di un punto regolare $p \in M$.*

1) *Ogni componente connessa dell'insieme dei punti fissi M^K è una sezione. Viceversa ogni sezione è una componente connessa di un insieme M^H , dove H è lo stabilizzatore di un opportuno punto regolare.*

2) *La cardinalità dell'insieme delle componenti connesse di M^K è pari alla cardinalità dell'insieme di classi laterali N/W , dove $N = N_G(K)/K$ e W è il gruppo di Weyl di una sezione.*

3) *Dato un punto $y \in M$, denotiamo con H lo stabilizzatore G_y e sia $K \subset H$ un sottogruppo di isotropia regolare. Esiste una corrispondenza biunivoca tra a) sottogruppi L di H coniugati in H a K ; b) elementi dell'insieme di laterali $H/N_H(K)$; c) sezioni che passano per il punto y .*

4) *Se Σ è una sezione, $y \in \Sigma$ e W il suo gruppo di Weyl, allora $W_y = N_H(K)/K$, dove $H = G_y$ e $K \subset H$ è un sottogruppo di isotropia regolare.*

DIMOSTRAZIONE. 1) È noto che M^K (dove $K = G_p$, p punto regolare) è una sottovarietà regolare totalmente geodetica (vedi [Kob]) e che $T_p(M^K) = \{v \in T_p M; dg(v) = v, g \in G_p\}$. Se $y \in M^K \cap M_{\text{reg}}$, allora $K = G_y$. Allora

$$\begin{aligned} T_y M^K &= \{ v \in T_y M : k_* v = v \ k \in K \} = \\ &= \{ v \in T_y M : g_* v = v \ g \in G_y \} = T_y(G(y))^\perp, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla definizione di asistaticità e dalla Proposizione III.6.3. Dunque ogni componente connessa Σ di M^K interseca le orbite dei suoi punti regolari ortogonalmente e quindi, per continuità, interseca ortogonalmente anche le orbite di ogni altro suo punto.

Resta da provare che Σ interseca ogni orbita. Ma questo è una conseguenza immediata del Lemma 1.13.

La seconda asserzione segue dal fatto che ogni altra sezione è ottenibile come $g(\Sigma)$ per un opportuno $g \in G$.

2) Poichè ogni componente di M^K è una sezione, l'una è ottenibile dall'altra tramite l'azione di un elemento di $N_G(K)/K$, che pertanto agisce sull'insieme delle componenti connesse transitivamente; il gruppo di Weyl W è l'insieme delle trasformazioni di $N_G(K)/K$ che preserva una componente Σ , da cui la tesi.

3) Sia $y \in M$ e sia $K \subset H = G_y$. Se $x \in M^K$, chiaramente appartiene esattamente ad una ed una sola componente M_x^K di M^K . D'altra parte il gruppo H agisce transitivamente sull'insieme delle sezioni che passano per il punto y (vedi Teorema 1.8 (b)); quindi ogni altra sezione per y si può scrivere come $hM_x^K = M_x^{hKh^{-1}}$ per qualche $h \in H$ ed è determinata dal sottogruppo hKh^{-1} che è coniugato a K in H .

4) È chiaro che $W_y \subset N_H(K)/K$, poichè $W_y \subset H/K \cap N_G(K)/K$. Inoltre se $n \in N_H(K)/K$, esso preserva M^K e quindi mantiene fissa Σ in quanto Σ è l'unica componente di M^K che contiene y . Ne segue che $N_H(K)/K = W_y$. $\square$

Si noti che, in pratica, non sempre risulta facile stabilire se una G -varietà sia asistatica oppure no. Nel caso però in cui il gruppo G sia compatto, esiste un semplice criterio.

CRITERIO 3.6. *Sia $M = G/K$ uno spazio omogeneo con G compatto. Se K è di rango massimo, allora M è una G -varietà asistatica.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, sappiamo che K ha rango massimo se e solo se $\chi(M) \neq 0$ (vedi Teorema I.6.19 (b)). D'altra parte, se M non fosse G -asistatica, esisterebbe un campo di vettori G -invariante mai nullo e quindi $\chi(M)$ sarebbe nulla. $\square$

§4. Azioni polari.

Nel Teorema 1.7, abbiamo visto che se esiste una sezione, allora la rappresentazione lineare di "slice" di G_p sullo spazio normale $(T_p G(p))^\perp$ ammette sezioni. Questo fatto non solo mostra l'esistenza di numerosi spazi vettoriali V con azione di un gruppo G che ammette sezioni, ma fa anche capire, tramite il Teorema del Tubo, come sia l'importante lo studio di tali spazi vettoriali al fine della descrizione di generiche G -varietà con sezioni.

Il presente capitolo è rivolto proprio a questo tipo di azioni lineari, chiamate *azioni polari*. Enunciamo in modo formale la loro definizione.

DEFINIZIONE 4.1. Sia $\rho : G \rightarrow O(V)$ una rappresentazione ortogonale di un gruppo compatto G su uno spazio vettoriale V . Se tale azione ammette sezioni, si dice che l'azione è *polare*.

Le azioni polari sono state studiate e classificate da J. Dadok ([Dad]) e vogliamo qui esporre alcuni dei suoi risultati.

Indichiamo con $\langle, \rangle$ un prodotto scalare su V che sia G -invariante e osserviamo che, se $\mathfrak{g}$ denota l'algebra di Lie di G , allora per ogni $v \in V$, lo spazio tangente all'orbita Gv è dato da $\mathfrak{g}v$. Iniziamo allora con il seguente

LEMMA 4.2. *Per ogni $v \in V$ sia*

$$\mathfrak{a}_v = \{u \in V; \langle u, \mathfrak{g}v \rangle = 0\} = (\mathfrak{g}v)^\perp.$$

Il sottospazio $\mathfrak{a}_v$ interseca tutte le orbite.

DIMOSTRAZIONE. Sia $w \in V$ e consideriamo l'applicazione $g \mapsto \langle gw, v \rangle$. Poichè il gruppo G è compatto, esiste un punto critico $g_o \in G$. In tal punto

$$0 = \langle \mathfrak{g}g_o w, v \rangle = \langle g_o w, \mathfrak{g}v \rangle,$$

ovvero $g_o w \in \mathfrak{a}_v \cap G(w)$. $\square$

Per il Lemma 4.2 è chiaro che una sezione di V (se esiste) deve essere un sottospazio vettoriale (essendo totalmente geodetica e passante per l'origine) e coincidente con il sottospazio $\mathfrak{a}_{v_o}$ di qualche punto regolare v_o . Infatti abbiamo la seguente

PROPOSIZIONE 4.3. *Fissato un punto regolare $v_o \in V$, l'azione di G è polare se e solo se è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- a) *per ogni $u \in \mathfrak{a}_{v_o}$, si ha $\langle \mathfrak{g}u, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = 0$;*
- b) *per ogni $v \in V$ regolare, $\mathfrak{g}v = k(\mathfrak{g}v_o)$ per qualche $k \in G$;*
- c) *per ogni $v \in V$ regolare, $\mathfrak{a}_v = k(\mathfrak{a}_{v_o})$ per qualche $k \in G$.*

DIMOSTRAZIONE. Grazie al Lemma 4.2, è chiaro che $\mathfrak{a}_{v_o}$ è una sezione se e solo se vale (a). Dobbiamo provare che (b) e (c) sono equivalenti ad (a). Le condizioni (b) e (c) sono equivalenti tra di loro perchè l'azione di G è isometrica; inoltre se

vale (a), allora $\mathfrak{a}_{v_o}$ è una sezione e per ogni punto regolare passa esattamente una sola sezione che deve essere una traslata della sezione $\mathfrak{a}_{v_o}$, vale a dire (c). Resta allora da provare che (c) implica (a).

A tal proposito, poniamo

$$\mathfrak{b} = \{v \in \mathfrak{a}_{v_o}; \langle \mathfrak{g}v, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = 0\},$$

che è chiaramente un sottospazio di $\mathfrak{a}_{v_o}$. Dobbiamo dunque far vedere che $\mathfrak{b}$ coincide con $\mathfrak{a}_{v_o}$. Allo scopo, premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 4.4. *Se $x \in \mathfrak{a}_{v_o} \setminus \mathfrak{b}$ è regolare, l'intersezione $G(x) \cap \mathfrak{b}$ è vuota.*

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. Supponiamo per assurdo che x sia uguale a $x = hy$ per qualche $h \in G$ e qualche $y \in \mathfrak{b}$. Poichè x e y sono regolari e dal fatto che $\langle \mathfrak{g}y, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = 0$, abbiamo che

$$\mathfrak{a}_{v_o} = (\mathfrak{g}y)^\perp = \mathfrak{a}_y :$$

infatti, $(\mathfrak{g}y)^\perp$ deve avere dimensione minima possibile e deve quindi coincidere con $\mathfrak{a}_{v_o}$. Di conseguenza, si ha anche che

$$h\mathfrak{a}_{v_o} = (\mathfrak{g}x)^\perp = \mathfrak{a}_x$$

e, poichè anche x è regolare e appartiene a $\mathfrak{a}_{v_o}$, si ha

$$h\mathfrak{a}_{v_o} = \mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_{v_o}$$

cioè h stabilizza $\mathfrak{a}_{v_o}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{g}x, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle &= \langle \mathfrak{g}hy, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = \langle hh^{-1}\mathfrak{g}hy, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = \\ &= \langle h\mathfrak{g}y, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = \langle \mathfrak{g}y, h^{-1}\mathfrak{a}_{v_o} \rangle = \langle \mathfrak{g}y, \mathfrak{a}_{v_o} \rangle = 0 , \end{aligned}$$

ovvero $x \in \mathfrak{b}$: contraddizione. $\square$

Dal momento che $v_o \in \mathfrak{a}_{v_o}$ è regolare, esiste un intorno di v_o in $\mathfrak{a}_{v_o}$ di punti regolari e quindi, se per assurdo il sottospazio $\mathfrak{b}$ (che ovviamente contiene v_o , data l'azione isometrica di G) fosse propriamente contenuto in $\mathfrak{b}$, sarebbe possibile determinare un elemento regolare $w \in \mathfrak{a}_{v_o} \setminus \mathfrak{b}$. Per l'ipotesi (c), esiste un elemento $k \in G$ tale che $k\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a}_{v_o}$. Ma allora, osservando che $w \in \mathfrak{a}_w$, abbiamo che $kw \in \mathfrak{a}_{v_o}$ e che, per questione di dimensioni,

$$\mathfrak{a}_{kw} = (\mathfrak{g}kw)^\perp = \mathfrak{a}_{v_o} ,$$

ovvero $kw \in \mathfrak{b}$. Ma questo è impossibile per il Lemma 4.4. $\square$

Il seguente teorema fornisce un ingrediente essenziale nella classificazione delle azioni polari, in quanto permette di ridursi al caso di rappresentazioni irriducibili:

TEOREMA 4.5. *Sia G un gruppo compatto connesso e sia $\rho : G \rightarrow SO(V)$ una rappresentazione polare. Se $V = V_1 \oplus V_2$ con V_i ($i = 1, 2$) sottospazi G -stabili, allora:*

a) le rappresentazioni $\rho_i : G \rightarrow SO(V_i)$ sono polari ($i = 1, 2$) e se $\mathfrak{a}$ è una sezione in V , allora i sottospazi $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap V_i$ sono sezioni in V_i , ($i = 1, 2$);

b) ogni sezione $\mathfrak{a} \subset V$ è della forma $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$; in particolare $\dim(V/G) = \dim(V_1/G) + \dim(V_2/G)$, (qui, per 'dimensione' di uno spazio di orbite, intendiamo la coomogeneità dell'azione);

c) fissata una sezione $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$, si definiscano le seguenti sottoalgebre di $\mathfrak{g}$ date da

$$\mathfrak{h}_i = \{X \in \mathfrak{g}; Xv = v, \forall v \in \mathfrak{a}_j, j \neq i\}, \quad i = 1, 2;$$

se H_1, H_2 sono i sottogruppi connessi corrispondenti alle algebre $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$, allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $G = H_1 \cdot H_2$; inoltre la rappresentazione

$$\begin{aligned} \pi : H_1 \times H_2 &\rightarrow SO(V_1 \oplus V_2) \\ \pi((h_1, h_2))(v_1 + v_2) &= (h_1 v_1, h_2 v_2) \end{aligned}$$

è polare e le sue orbite coincidono con le orbite di ρ .

DIMOSTRAZIONE. a) Sia $\mathfrak{a}$ una sezione e si definiscano i sottospazi

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap V_i \quad i = 1, 2.$$

Si scelgano poi due vettori $v_i \in V_i$ in modo tale che il vettore $v_1 + v_2$ sia regolare e che quindi $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{v_1+v_2}$. Allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_i &= \{u \in V_i; \langle u, X(v_1 + v_2) \rangle = 0 \mid X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{u \in V_i; \langle u, Xv_i \rangle = 0 \mid X \in \mathfrak{g}\} = (\mathfrak{g}v_i)^\perp \cap V_i. \end{aligned}$$

Per il Lemma 4.2, segue subito che ogni sottospazio $\mathfrak{a}_i$ interseca ogni orbita di G in V_i ed essendo incluso in $\mathfrak{a}$ deve intersecare tali orbite ortogonalmente. Questo dimostra (a).

b) Dimostreremo l'asserzione per induzione sulla dimensione di V . Fissiamo una sezione $\mathfrak{a}_1$ in V_1 e sia v_1 un punto regolare per l'azione di G su V_1 . Notiamo che $\mathfrak{a}_{v_1} = \mathfrak{a}_1 \oplus V_2$: infatti sia $x \in \mathfrak{a}_{v_1}$ con $x = x_1 + x_2$; è chiaro che $\langle x, \mathfrak{g}v_1 \rangle = 0$ se e solo se $\langle x_1, \mathfrak{g}v_1 \rangle = 0$, ovvero se e solo se $x_1 \in \mathfrak{a}_1$.

Consideriamo ora il sottogruppo G_{v_1} che agisce su $\mathfrak{a}_{v_1}$: dal Teorema 1.7, segue che tale azione è polare con sezione $\mathfrak{a}$, dove $\mathfrak{a}$ è una sezione in V . Ma, eccettuato il caso banale, $\dim(\mathfrak{a}_{v_1}) < \dim V$ e quindi, per ipotesi induttiva, abbiamo che

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus (\mathfrak{a} \cap V_2) = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2,$$

come volevamo dimostrare. Si noti che la dimostrazione implica anche che G_{v_1} e G agiscono su V_2 con le stesse sezioni e quindi con le stesse coomogeneità.

c) Scegliamo $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$ due punti regolari per l'azione di G su ciascun V_i . Allora se per ogni $z \in V$ indichiamo con $\mathfrak{g}_z$ l'algebra di isotropia, abbiamo che le due sottoalgebre $\mathfrak{h}_i$ sono identificabili con le algebre di isotropia $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_{v_j}$, $j \neq i$,

$i, j = 1, 2$. Dall'osservazione fatta nella dimostrazione del punto precedente, segue che

$$\mathfrak{h}_2 v_2 = \mathfrak{g} v_2, \quad \mathfrak{h}_1 v_1 = \mathfrak{g} v_1.$$

Inoltre se scegliamo v_1, v_2 in modo che $v_1 + v_2$ sia regolare, abbiamo, dal punto (b), che

$$\dim G - \dim G_{v_1+v_2} = 2 \dim G - \dim G_{v_1} - \dim G_{v_2}.$$

Ma $G_{v_1+v_2} = G_{v_1} \cap G_{v_2}$ e quindi segue che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{v_1} + \mathfrak{g}_{v_2} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \quad (4.1)$$

da cui $G = H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$. Poichè tramite la rappresentazione π , ciascun H_i agisce solo su V_i , abbiamo che, per ogni $g \in G$ con $g = h_1 h_2$ ($h_i \in H_i$, $i = 1, 2$) e per ogni $v_i \in V_i$,

$$g(v_1 + v_2) = h_1 h_2(v_1 + v_2) = h_1 v_1 + h_2 v_2,$$

da cui $G(v_1 + v_2) \subset (H_1 \times H_2)(v_1 + v_2)$. Da (4.1) ed essendo entrambe le orbite connesse, concludiamo che coincidono. $\square$

Come già detto, J. Dadok ha ottenuto un teorema di classificazione di tutte le rappresentazioni polari irriducibili, le quali, congiuntamente al Teorema 4.5 portano alla completa descrizione di tutte le rappresentazioni polari.

Il teorema di classificazione riconduce quasi tutte le rappresentazioni polari alle rappresentazioni di isotropia degli spazi simmetrici, già discusse nell' Esempio 1.4 in §1. Per poterlo enunciare, abbiamo però bisogno della seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.6. Sia G un gruppo connesso compatto; una rappresentazione $\pi : G \rightarrow SO(V)$ verrà detta una *s-rappresentazione*, se esiste un'algebra semisemplice $\mathfrak{h}$ con decomposizione di Cartan

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

un isomorfismo di algebre $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$ ed un isomorfismo $L : V \rightarrow \mathfrak{p}$ tale che

$$L(\pi(X)(y)) = [A(X), L(y)], \quad X \in \mathfrak{g}, y \in V.$$

Il risultato principale, per la cui dimostrazione rimandiamo all'articolo originale di J. Dadok ([Dad]), è dunque il seguente:

TEOREMA 4.7. *Sia $\pi : G \rightarrow SO(V)$ una rappresentazione irriducibile, polare di un gruppo connesso compatto G . Allora π è una s -rappresentazione oppure è una delle seguenti rappresentazioni eccezionali (K indica l'isotropia regolare e k indica la coomogeneità):*

V	G	K	k
$\mathbb{R}^7$	G_2	$SU(3)$	1
$\mathbb{R}^8$	$Spin(7)$	G_2	1
$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^8$	$SO(3) \times Spin(7)$	$SU(2)$	3
$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{4n}$	$SO(2) \times Sp(n)$	$T^1 \times Sp(n-1)$	$4n+1$
$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^7$	$SO(2) \times G_2$	$SU(3)$	7
$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^8$	$SO(2) \times Spin(7)$	G_2	8

Bibliografia

- [Ada] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [Ale1] D. V. Alekseevsky, *Riemannian manifolds of cohomogeneity one*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, vol. 56, 1989, pp. 9–22.
- [Ale2] D. V. Alekseevsky, *Groups of conformal transformations of Riemannian spaces*, Math. USSR Sbornik **18** (1972), 285–301.
- [AlA11] A. V. Alekseevsky and D. V. Alekseevsky, *G-manifolds with one dimensional orbit space*, Adv. in Sov. Math. **8** (1992), 1–31.
- [AlA12] A. V. Alekseevsky and D. V. Alekseevsky, *Riemannian G-manifolds with one dimensional orbit space*, Ann. Glob. Anal. and Geom. **11** (1993), 197–211.
- [Ama] U. Amaldi, *Introduzione alla Teoria dei Gruppi Continui di Trasformazioni I, II*, Libreria dell'Univ. di Roma, Roma, 1942, 1944.
- [Bes] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer Verlag, 1986.
- [Bor1] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. A.M.S. **55** (1949), 580–587.
- [Bor2] A. Borel, *Topology of Lie groups and characteristic classes*, Bull. A.M.S. **61** (1955), 397–432.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie IX*, Hermann, Paris, 1975.
- [BoHi] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces, Part I*, Amer.J.Math. **80** (1958), 458–538.
- [Bre] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Math., vol. 46, Academic Press New York and London, 1972.
- [ChKo] H. Chu and S. Kobayashi, *The automorphism group of a geometric structure*, Trans. A.M.S. **113** (1963), 141–150.
- [Dad] J. Dadok, *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups*, Trans. A.M.S. **288** (1985), 125–137.
- [Die] J. Dieudonné, *Fondements de l'Analyse Moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.
- [DyOn] D. Dynkin and A. L. Onishchik, *Compact global Lie groups*, A.M.S. Transl. **21** (1961), 119–192.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1987.
- [Gol] S. I. Goldberg, *Curvature and Homology*, Academic Press, 1962.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1981.
- [Hoc] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
- [HoSa] H. Hopf and H. Samelson, *Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen*, Comm.Math. Helv. **13** (1941), 240–251.
- [HsLa] W. Hsiang and H. B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geometry **5** (1971), 1–38.
- [HuSn] A. T. Huckleberry and D. Snow, *Almost-homogeneous Kaehler manifolds with hypersurface orbits*, Osaka J. Math. **19** (1982), 763–786.
- [Hus] D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Kob1] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer Verlag, 1972.
- [KoNo] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I,II*, Wiley Interscience, New York, 1963, 1969.
- [Kos] J. L. Koszul, *Lectures on Groups of transformations*, Lectures on Math., vol. 32, Tata Inst., Bombay, 1965.
- [Mon] D. Montgomery, *Simply connected homogeneous spaces*, Proc. A.M.S. **1** (1950), 467–469.
- [Moo] J. D. Moore, *Equivariant embeddings of Riemannian homogeneous spaces*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 271–279.
- [MoSa] D. Montgomery and H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math. **44** (1943), 454–470.
- [Mos] P. S. Mostert, *On a compact Lie group action on manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 447–455.

- [Most] G. D. Mostow, *Equivariant embeddings into euclidean space*, Ann. of Math. **65** (1957), 432–446.
- [Nag] T. Nagano, *Transformation groups with $(n-1)$ -dimensional orbits on non-compact manifolds*, Nagoya Math. J. **14** (1959), 25–38.
- [NoOz] K. Nomizu and H. Ozeki, *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. A.M.S. **12** (1961), 889–891.
- [ONe] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469.
- [Oni] A. L. Onishchick (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Springer Verlag, 1993.
- [Pal1] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73** (1961), 295–323.
- [Pal2] R. S. Palais, *Slices and equivariant imbeddings*, "Seminar on Transformation Groups", Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press **46** (1960).
- [Pal3] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Memoirs A.M.S., vol.22, 1957.
- [PaTe] R. S. Palais and Ch. L. Terng, *A general theory of canonical forms*, Trans. A.M.S. **300** (1987), 771–789.
- [Sch] G. Schwartz, *Smooth functions invariant under the action of a Lie group*, Topology **14** (1987), 771–789.
- [Sin] I. M. Singer, *Infinitesimally homogeneous spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 685–697.
- [Spi] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I–V*, Publish or Perish Inc., 1979.
- [Ste] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, 1964.
- [Sze] J. Szenthe, *Orthogonally transversal submanifolds and the generalization of the Weyl group*, Period. Math. Hungar. **15** (1984), 281–299.
- [War] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, New York, 1983.
- [Var] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

INDICE ANALITICO

azione	pag.
asistatica	131
di Cartan	93
di un gruppo di Lie	7
di un gruppo di Lie locale	9
effettiva	7
locale	9
libera	8
polare	134
propria	91
quasi effettiva	7
transitiva	30
base di un fibrato	47
campo fondamentale su un fibrato	47
campo vettoriale	
completo	12
flusso di	12
locale	12
caratteristica di Eulero	42
Cartan, azioni di	93
connessione	48
canonica	48
forma di	49
di Levi Civita	61
coomogeneità	110
coordinate, sistema di coordinate adattato	70
equivalenza	
fra azioni	7
fra fibrati	48
{ e }- struttura	69
torsione di	69
punto di regolarità	70
fetta G_p - invariante	93
fibrato principale	36, 47
banale	48
base di	47

connessione su	48
connessione canonica	48
distribuzione verticale	48
equivalenza locale di	48
fibra di	47
isomorfismo di	48
dei riferimenti conformi	52
dei riferimenti ortonormali	51
riduzione	48
sezione locale di	47
sottofibrato di	48
fibrato prodotto	95
flag manifold	35
forma	
canonica	49
di connessione	49
tautologica	49
funzioni di struttura	69
geodetica normale	124
gruppo	
infinitesimale di trasformazioni	18
di Lie locale	9
lineare di tipo finito	58
ordine di	58
prolungamento di	58
di Weyl	42
di Weyl di una sezione	122
G_p -slice	93
G - spazio	7
G - struttura	50
infinitesimamente omogenea	76
prolungamento di	58
immersione regolare	97
intorno tubolare	106
invariante di Singer	75
isomorfismo	
fra gruppi di Lie locali	9
isotropia	8
jet	79
obiettivo di	79
ordine di	79
rappresentante canonico di	79
sorgente di	79
obiettivo di un jet	79
operatore di Spencer	57
orbita	
spazio di	7, 98

tipo di	107
ordine	
di un gruppo lineare di tipo finito	58
di un jet	79
di un parallelismo	71
di un sistema regolare di e.d.p.	81
parallelismo assoluto	63
ordine di	71
rango di	71
prodotto fibrato	95
prolungamento	
di una G -struttura	58
di un gruppo lineare	58
di un sistema regolare di e.d.p.	82
punto di regolarità	71
punto	
eccezionale	110
regolare o principale	110
singolare	110
rango	
di un gruppo di Lie compatto	42
di un parallelismo	71
di uno spazio simmetrico	118
rappresentante canonico di un jet	79
rappresentazione	
lineare di isotropia	38
lineare di 'slice'	106
s-	137
riduzione di un fibrato	48
riferimenti lineari	49
sezione	116
sezione locale di un fibrato	47
Singer, invariante di	75
sistema di coordinate adattato	70
sistema regolare di equazioni alle derivate parziali	81
formalmente integrabile	82
ordine di	81
prolungamento di	82
soluzione locale	81
slice (vedi anche: fetta)	93
sorgente di un jet	79
sottofibrato	48
sottospazio orizzontale	54
sottovarietà regolare	97
spazio delle orbite	7, 98
spazio omogeneo	30
Spencer, operatore di	57

tipo d'orbita	107
topologia compatta aperta	27
modificata	27
toro massimale	111
torsione di una $\{e\}$ -struttura	69
trasformazione infinitesima	14
tubo	106
varietà	
infinitesimamente omogenea	76
omogenea	30
parallelizzabile	63
riduttiva	39
bandiera	35